M53. Devoir surveillé 1. 2020 - 2021.

Exercice 1.

a) $\forall x > 1$, $\forall t \in [0, \pi]$, on a : $x + \cos(t) > 1 + \cos(t) \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $x > 1$, la fonction $t \longmapsto \ln(x + \cos(t))$ est continue sur $[0, \pi]$ et donc Riemann-intégrable.

Donc F est bien définie sur $]1 ; +\infty[$.

b) Soit
$$f : \begin{array}{rcl}]1;+\infty[\times [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) = \ln(x+\cos(t)). \end{array}$$

- La fonction f est continue sur $]1;+\infty[\times [0,\pi]$
- Pour tout $t \in [0,\pi]$, $x \longmapsto f(x,t) = \ln(x + \cos(t))$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{x+\cos(t)}$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]1;+\infty[\times [0,\pi]$.

Le théorème ② du chapitre 2 permet alors de conclure que F est de classe C^1 sur $]1;+\infty[$ et pour $x > 1$, on a :

$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^\pi \frac{1}{x+\cos(t)}\,dt.$$

c) Effectuons le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$

On a alors $du = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt$

soit $dt = \frac{2}{1+u^2}du$.

D'où :

$$F'(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} du$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+u^2) + 1 - u^2} du$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-1)u^2 + 1 + x} du$$

$$= \frac{2}{x+1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{x-1}{x+1}u^2} du \qquad (x+1 \neq 0)$$

Effectuons le changement de variable $v = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, u$

D'où $du = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dv$ et on obtient :

$$F'(x) = \frac{2}{x+1}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}\Big[\arctan(v)\Big]_0^{+\infty}$$

On obtient finalement que pour $x > 1$, on a :

$$F'(x) = \frac{\cancel{x}}{\sqrt{x^2-1}} \times \frac{\pi}{\cancel{x}}$$

soit

$$\boxed{F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}}$$

d) La fonction G est dérivable sur $]1 ; +\infty[$

et on a pour $x > 1$,

$$G'(x) = \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\cancel{\sqrt{x^2-1} + x}}{\sqrt{x^2-1}\,\cancel{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}}$$

soit :

$$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

D'après la question c), on en déduit donc que

$$\forall x > 1, \qquad F'(x) = \pi\, G'(x).$$

Comme $]1 ; +\infty[$ est un intervalle, on obtient qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 1$

on a :

$$F(x) = \pi\, G(x) + k.$$

e) Soit $\varphi :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \ln(1+x)$$

La fonction φ est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $v \in]-1,1[$, on a :

$$|\ln(1+v)| = |\varphi(v) - \varphi(0)| \leq |v-0| \times \sup_{\substack{x \text{ compris} \\ \text{entre } 0 \text{ et } v}} |\varphi'(x)|$$

$$\leq |v| \sup_{|x|\leq|v|} |\varphi'(x)|$$

$$= |v| \sup_{|x|\leq|v|} \frac{1}{|1+x|}$$

Or pour tout x, $|x| \leq |v|$, on a : $|1+x| \geq 1-|x| \geq 1-|v| > 0$.

D'où $$|\ln(1+v)| \leq \frac{|v|}{1-|v|}.$$

f) On a : $$\int_0^\pi \ln(x)\,dt = \ln(x)\int_0^\pi dt = \pi\ln(x).$$

D'où :

$$F(x) - \pi\ln(x) = \int_0^\pi \ln(x+\cos(t))\,dt - \int_0^\pi \ln(x)\,dt$$

$$= \int_0^\pi \left(\ln(x+\cos(t)) - \ln(x)\right) dt$$

$$= \int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{\cos(t)}{x}\right) dt \quad , x \geq 2$$
(donc $x \neq 0$)

D'où :

$$\left|F(x) - \pi \ln(x)\right| = \left|\int_0^{\pi} \ln\left(1 + \frac{\cos(t)}{x}\right) dt\right|$$

$$\leq \int_0^{\pi} \left|\ln\left(1 + \frac{\cos(t)}{x}\right)\right| dt$$

. Pour $x \geq 2$ et $t \in [0, \pi]$, on a :

$$\left|\frac{\cos(t)}{x}\right| \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$. D'où $\frac{\cos(t)}{x} \in]-1, 1[$

et d'après la question e), on a :

$$\left|\ln\left(1 + \frac{\cos(t)}{x}\right)\right| \leq \frac{\left|\frac{\cos(t)}{x}\right|}{1 - \left|\frac{\cos(t)}{x}\right|}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{x}.$$

Ainsi

$$\left|F(x) - \pi \ln(x)\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{2}{x} dt = \frac{2\pi}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\pi}{x} = 0$ et d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \left|F(x) - \pi \ln(x)\right| = 0 .$$

g) On a d'après la question d),

$$F(x) = \pi \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right) + k$$

D'où

$$F(x) - \pi \ln(x) = \pi\left(\ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) - \ln(x)\right) + k$$

$$= \pi \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}\right) + k$$

$$= \pi \ln\left(1 + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) + k$$

$$= \pi \ln\left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + k$$

Remarquons alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = \ln(1+1) = \ln 2$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(F(x) - \pi \ln(x)\right) = \pi \ln(2) + k$

Or d'après la question f), on a : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(F(x) - \pi\ln(x)\right) = 0$

On en déduit que $\pi \ln(2) + k = 0$

d'où $k = -\pi \ln(2)$.

Finalement, pour $x > 1$, on a :

$$\underline{F(x) = \pi \ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) - \pi \ln(2).}$$

Exercice 2.

a) Soit $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \longmapsto f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}.$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, on a :

$$|f(x,t)| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2} =: g(t).$$

La fonction g est continue donc localement intégrable sur $[0; +\infty[$. De plus, on a :

$$\int_0^X g(t)\,dt = \left[\arctan(t)\right]_0^X = \arctan(X) \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Le théorème 1 du chapitre 3 implique alors que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) - D'après le a), la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge (puisque F est défini sur $\mathbb{R}$).

- Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.

- Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$, tout $t \geqslant 0$, on a:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$$

Soit $g(t) := \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$, $t \geqslant 0$.

La fonction g est continue donc localement intégrable sur $[0;+\infty[$. De plus, on a:

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{a^2\, t^4} = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{t^3}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ converge et on en déduit

donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ converge

Le Théorème 2 du chapitre 3 permet alors d'en déduire que F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$

et $\forall x \geqslant a$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt.$$

Or la propriété précédente est vraie pour tout $a > 0$.

Donc on en déduit que F est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$, on a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt.$$

c) D'après la question b), pour $x > 0$, on a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt$$

D'où en utilisant la décomposition en éléments simples donnée dans l'énoncé, on a pour $x > 0$, $x \neq 1$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right)dt.$$

D'où

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2t^2\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2(1-x^2)}\left[\ln\left(\frac{1+t^2}{1+x^2t^2}\right)\right]_0^{+\infty}$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1+t^2}{1+x^2t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2}{x^2t^2} = \dfrac{1}{x^2}$

D'où $F'(x) = \dfrac{1}{2(1-x^2)}\left(\ln\dfrac{1}{x^2} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\ln 1}}\right)$

$$= \frac{-2\ln(x)}{2(1-x^2)}$$

soit :

$$\underline{F'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}, \quad x>0, \ x\neq 1.}$$

Pour le calcul de $F'(1)$, remarquons que

$$\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{\ln(x)-\ln(1)}{(x+1)(x-1)}.$$

Or $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable en $x=1$, de dérivée égale à 1. D'où :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = 1$$

et donc $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}$. (11)

Comme F est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$, F' est continue en 1. On a donc :

$$F'(1) = \lim_{x \to 1} F'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{F'(1) = \frac{1}{2}.}$$

d) Pour tout $x > 0$, $t \geq 0$, on a :

$$\frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+t^2}$$

D'où

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

D'autre part, pour $t \geq a$ et $x > 0$, on a

$\arctan(ax) \leq \arctan(xt)$

D'où

$$\arctan(ax) \int_a^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \int_a^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$$

$$= F(x)$$

(la dernière inégalité vient du fait que

$$\frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \geqslant 0, \quad \forall x>0, t \geqslant 0).$$

e) D'après la question c), on a :

$$\text{pour } x>0, \quad F'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

Or $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1} = \dfrac{\ln(x)}{(x+1)(x-1)}$

Remarquons alors que $\forall x>0, \; x+1>1>0$

et $\ln(x)$ est du signe de $x-1$ donc

$$\frac{\ln(x)}{x-1} > 0, \quad x \neq 1.$$

Ainsi $\forall x>0, \; F'(x)>0$ et donc F est croissante sur $]0;+\infty[$.

D'après la question précédente, pour tout $x>0$, on a :

$$F(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

Autrement dit, F est majorée par $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Or si une fonction est croissante et bornée sur $]0,+\infty[$ (13)

alors elle admet une limite finie en $+\infty$.

Ainsi on en déduit que

$$l := \lim_{x \to +\infty} F(x) \text{ existe.}$$

f) D'après ce qui précède, on a

$$F(x) \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

Ainsi $$l \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

D'autre part, d'après d), on a, pour tout $a > 0$:

$$\arctan(ax) \int_a^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \leq F(x).$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on a

$$\frac{\pi}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \leq l$$

soit $$\frac{\pi}{2} \Big[\arctan(t)\Big]_a^{+\infty} \leq l$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(a)\right) \leq l.$$

Il reste à faire tendre $a \longrightarrow 0$, pour en déduire

$\frac{\pi^2}{4} \leq l$ soit finalement $l = \frac{\pi^2}{4}$.

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2020-2021
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Vendredi 13 novembre
Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^\pi \ln(x + \cos(t))\, dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) En utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F'(x)$, $x > 1$.
Indication : on rappelle que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ *où* $u = \tan(t/2)$.

d) Soit $G(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$. Montrer qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 1$, on a $F(x) = \pi G(x) + k$.

e) Montrer que pour tout $v \in]-1, 1[$, on a

$$|\ln(1 + v)| \leq \frac{|v|}{1 - |v|}.$$

Indication : on pourra soit utiliser l'inégalité des accroissements finis, soit écrire que pour $v \in]-1, 1[$, *on a* $\ln(1 + v) = \int_0^v \frac{1}{1+t}\, dt$.

f) En déduire que pour $x \geq 2$, on a

$$|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x},$$

et calculer la limite en $+\infty$ de $F(x) - \pi \ln(x)$.
Indication : pour l'inégalité, on pourra remarquer que $\pi \ln(x) = \int_0^\pi \ln(x)\, dt$ *et écrire* $F(x) - \pi \ln(x)$ *sous la forme d'une seule intégrale, puis utiliser la question e).*

g) En déduire la valeur de la constante k et finalement l'expression de $F(x)$ pour $x > 1$.
Indication : on remarquera que $F(x) - \pi \ln(x) = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) + k$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2020-2021
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Vendredi 13 novembre
Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi} \ln(x + \cos(t))\, dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) En utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F'(x)$, $x > 1$.
Indication : on rappelle que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ *où* $u = \tan(t/2)$.

d) Soit $G(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$. Montrer qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 1$, on a $F(x) = \pi G(x) + k$.

e) Montrer que pour tout $v \in]-1, 1[$, on a

$$|\ln(1 + v)| \leq \frac{|v|}{1 - |v|}.$$

Indication : on pourra soit utiliser l'inégalité des accroissements finis, soit écrire que pour $v \in]-1, 1[$, *on a* $\ln(1 + v) = \int_0^v \frac{1}{1+t}\, dt$.

f) En déduire que pour $x \geq 2$, on a

$$|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x},$$

et calculer la limite en $+\infty$ de $F(x) - \pi \ln(x)$.
Indication : pour l'inégalité, on pourra remarquer que $\pi \ln(x) = \int_0^{\pi} \ln(x)\, dt$ *et écrire* $F(x) - \pi \ln(x)$ *sous la forme d'une seule intégrale, puis utiliser la question e).*

g) En déduire la valeur de la constante k et finalement l'expression de $F(x)$ pour $x > 1$.
Indication : on remarquera que $F(x) - \pi \ln(x) = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) + k$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.