Licence de Mathématiques- Semestre 5 2020-2021
M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 1

Vendredi 13 novembre
Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi} \ln(x + \cos(t))\, dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $]1, +\infty[$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) En utilisant le changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer $F'(x)$, $x > 1$.
Indication : on rappelle que $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ *où* $u = \tan(t/2)$.

d) Soit $G(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$, $x > 1$. Montrer qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x > 1$, on a $F(x) = \pi G(x) + k$.

e) Montrer que pour tout $v \in]-1, 1[$, on a

$$|\ln(1 + v)| \leq \frac{|v|}{1 - |v|}.$$

Indication : on pourra soit utiliser l'inégalité des accroissements finis, soit écrire que pour $v \in]-1, 1[$, *on a* $\ln(1 + v) = \int_0^v \frac{1}{1+t}\, dt$.

f) En déduire que pour $x \geq 2$, on a

$$|F(x) - \pi \ln(x)| \leq \frac{2\pi}{x},$$

et calculer la limite en $+\infty$ de $F(x) - \pi \ln(x)$.
Indication : pour l'inégalité, on pourra remarquer que $\pi \ln(x) = \int_0^{\pi} \ln(x)\, dt$ *et écrire* $F(x) - \pi \ln(x)$ *sous la forme d'une seule intégrale, puis utiliser la question e).*

g) En déduire la valeur de la constante k et finalement l'expression de $F(x)$ pour $x > 1$.
Indication : on remarquera que $F(x) - \pi \ln(x) = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) + k$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) Calculer $F'(x)$ pour $x>0$, $x\neq 1$. En déduire la valeur de $F'(1)$.
Indication : pour le calcul de $F'(x)$, $x\neq 1$, on pourra utiliser (sans démonstration) la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}=\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{t}{1+t^2}-\frac{x^2t}{1+x^2t^2}\right).$$

d) Soit $a>0$. Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$\arctan(ax)\int_a^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt\leq F(x)\leq\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

e) Montrer que F est croissante sur $]0,+\infty[$ et en déduire en utilisant la question précédente que F a une limite finie ℓ en $+\infty$.

f) Montrer que $\ell=\frac{\pi^2}{4}$.