Devoir surveillé 1 - Samedi 13 novembre 2021

Exercice 1.

a) Soit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) = \cos(x\sin(t)). \end{array}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ (comme composée de fonctions continues). Comme $[0,\pi]$ est un compact de $\mathbb{R}$, on en déduit d'après le théorème du cours que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Rappelons que
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) = \cos(x\sin(t)) \end{array}$$
est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$.

De plus, $\forall t\in[0,\pi]$, la fonction $x \longmapsto f(x,t) = \cos(x\sin(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]$, on a :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)).$$

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$.

Un théorème du cours affirme alors que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$
soit
$$\boxed{F'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,dt.}$$

c) Rappelons que $\forall t \in [0, \pi]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$

et donc si $x \in [0, \pi]$, on a : $0 \leq x \sin(t) \leq x \leq \pi$

d'où $0 \leq \sin(x \sin(t))$.

Ainsi $\underline{\forall (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \pi], \quad \sin(t) \sin(x \sin(t)) \geq 0.}$

On en déduit donc que

$$\forall x \in [0, \pi], \quad F'(x) = - \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \leq 0.$$

<u>Montrons que l'inégalité est stricte si $x \in]0, \pi]$.</u>

Pour cela, on rappelle le résultat suivant :

Soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> et <u>positive</u>

Si $\int_a^b g(t) dt = 0$. Alors $\forall t \in [a, b]$, $g(t) = 0$.

Supposons donc qu'il existe $x_0 \in]0, \pi]$ tel que $F'(x_0) = 0$.

Alors $\int_0^\pi \sin(t) \sin(x_0 \sin(t)) dt = 0$.

Comme $t \longmapsto \sin(t) \sin(x_0 \sin(t))$ est continue et positive,

le rappel ci-dessus implique que

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \sin(t) \sin(x_0 \sin(t)) = 0.$$

Comme $\forall t \in]0, \pi[$, $\sin(t) \neq 0$, on en

déduit que $\forall t \in]0, \pi[$, $\sin(x_0 \sin(t)) = 0$.

Appliquons cette identité par exemple avec $t = \frac{\pi}{6}$.

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit que

$$\sin\left(\frac{x_0}{2}\right) = 0 .$$

Mais remarquons que $0 < x_0 \leq \pi \Longrightarrow 0 < \frac{x_0}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

et donc $\sin\left(\frac{x_0}{2}\right) > 0$ ce qui est absurde.

Ainsi $\forall x \in]0, \pi]$, $F'(x) < 0$ et donc F est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

d) Rappelons la formule de Taylor Lagrange

Soit h une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout $a, b \in I$, il existe un réel c compris entre a et b tel que :

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} h^{(n+1)}(c)$$

Appliquons cette formule avec $h(t) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $n = 3$, $a = 0$ et $b = u \in \mathbb{R}$.

La fonction h est de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

on a : $h'(t) = -\sin(t)$, $h''(t) = -\cos(t)$, $h^{(3)}(t) = \sin(t)$, $h^{(4)}(t) = \cos(t)$.

En particulier, $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = -1$, $h^{(3)}(0) = 0$

La formule de Taylor Lagrange implique qu'il existe c compris entre 0 et u tel que :

$$h(u) = \sum_{k=0}^{3} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} u^k + \frac{h^{(4)}(c)}{4!} u^4$$

soit

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{h^{(4)}(c)}{24} u^4.$$

Or $h^{(4)}(c) = \cos(c) \leq 1$.

D'où $\forall u \in \mathbb{R}$, $\cos(u) \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}$.

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t))\, dt.$$

D'après d), $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$,

$$\cos(x \sin(t)) \leq 1 - \frac{x^2}{2} \sin^2(t) + \frac{x^4}{24} \sin^4(t).$$

D'où

$$F(x) \leq \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} \sin^2(t) + \frac{x^4}{24} \sin^4(t)\right) dt$$

$$= \pi - \frac{x^2}{2} \int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt + \frac{x^4}{24} \int_0^{\pi} \sin^4(t)\, dt.$$

Avec les formules rappelées dans l'indication, on a :

$$\int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2t))\, dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \pi \quad \text{car } \sin(2\pi) = \sin(0) = 0 !$$

et

$$\int_0^{\pi} \sin^4(t)\, dt = \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (3 - 4\cos(2t) + \cos(4t))\, dt$$

c'est à dire

$$\int_0^{\pi} \sin^4(t)\,dt = \frac{1}{8}\left[3t - 2\sin(2t) + \frac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

Ainsi

$$F(x) \leq \pi - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{3\pi}{8\times \cancel{2}48}\, x^4$$

soit

$$F(x) \leq \pi\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}\right).$$

f) On a : $F(0) = \int_0^{\pi} 1\,dt = \pi \geqslant 0$.

De plus, par (e), on a :

$$F(2\sqrt{2}) \leq \pi\left(1 - \frac{8}{4} + \frac{64}{64}\right)$$

$$= \pi(2-2) = 0.$$

La fonction F est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Ainsi elle réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[F(\pi), F(0)]$.

Or $F(0) \geqslant 0$ et $F(\pi) \leq F(2\sqrt{2}) = 0$.

Donc $0 \in [F(\pi), F(0)]$ et il existe un unique $x \in [0,\pi]$ tel que $0 = F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\,dt$.

Exercice 2. a) Pour tout $x \in]0,1[$, la fonction $t \longmapsto (1-e^{-t})t^{x-2}$ est continue sur $]0;+\infty[$ donc localement intégrable sur $]0;+\infty[$.

De plus, remarquons que $e^{-t} = 1 - t + o(t)$, $t \to 0$

D'où $1 - e^{-t} = t + o(t)$, $t \to 0$

ce qui implique que $(1-e^{-t})t^{x-2} \underset{t \to 0^>}{\sim} t \cdot t^{x-2} = t^{x-1}$.

Or $\int_0^1 t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1$,

c'est à dire si et seulement si $0 < x$.

De +, comme $(1-e^{-t})t^{x-2} \geqslant 0$ si $t > 0$,

on peut utiliser le théorème sur les équivalents pour les intégrales généralisées et on en déduit que, si $x > 0$,

$\int_0^1 (1-e^{-t})t^{x-2} dt$ converge.

Remarquons enfin que $\lim_{t \to +\infty} (1-e^{-t}) = 1$, ainsi :

$$(1-e^{-t})t^{x-2} \underset{t \to +\infty}{\sim} t^{x-2}$$

Or $\int_1^{+\infty} t^{x-2} dt$ converge $\iff 2 - x > 1$

$\iff 1 > x$.

Ainsi si $x < 1$, $\int_1^{+\infty} (1-e^{-t}) t^{x-2}\,dt$ converge. ⑦

Finalement, on en déduit que si $x \in]0,1[$,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1-e^{-t}) t^{x-2}\,dt$ converge.

Donc H est bien définie sur $]0,1[$.

b) Soit $f :]0,1[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \longmapsto f(x,t) = (1-e^{-t})\, t^{x-2}$$

(*) La fonction f est continue sur $]0,1[\times]0,+\infty[$

et pour tout $x \in]0,1[$, $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ converge (voir a))

(**) Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \longmapsto f(x,t) = (1-e^{-t})\, t^{x-2}$

est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall (x,t) \in]0,1[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (1-e^{-t}) \ln(t)\, t^{x-2}$$

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]0,1[\times]0,+\infty[$.

(***) Fixons a, b tels que $0 < a < b < 1$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$a-2 \leq x-2 \leq b-2$$

et pour $t \in]0,1]$ (comme $\ln(t) \leq 0$), on obtient que $$(x-2)\ln(t) \leq (a-2)\ln(t)$$

soit $$t^{x-2} \leq t^{a-2}.$$

Ainsi $\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,1]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{a-2}$

De même pour $x \in [a,b]$ et $t \geqslant 1$ (car $\ln(t) \geqslant 0$),

on obtient : $$(x-2)\ln(t) \leq (b-2)\ln(t)$$

soit $$t^{x-2} \leq t^{b-2}$$

Ainsi $\forall (x,t) \in [a,b] \times [1,+\infty[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{b-2}$

On en déduit donc que

$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-e^{-t})|\ln(t)|\left(t^{a-2}+t^{b-2}\right).$$

Si $\varphi(t) := (1-e^{-t})|\ln(t)|\left(t^{a-2}+t^{b-2}\right)$, $t \in]0,+\infty[$.

montrons que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ converge.

Pour cela, il suffit de montrer que

$\forall c \in]0,1[$, $\int_0^{+\infty} (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2}\,dt$ converge.

Or la fonction $t \longmapsto (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2}$ est

continue et positive sur $]0\,;+\infty[$ donc en particulier localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

De plus, $(1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2} \underset{t\to 0}{\sim} |\ln(t)|\, t^{c-1}$

(voir a)). Comme $c>0$, $1-c<1$ et d'après

le rappel, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} |\ln(t)|\, t^{c-1}\,dt$ converge

(remarquons que pour $t \in]0,\frac{1}{e}[$, $\ln(t)<0$ et donc
$$|\ln(t)|\, t^{c-1} = -\frac{\ln(t)}{t^{1-c}} = -\frac{1}{(\ln(t))^{-1}\, t^{1-c}}\Big)$$.

Ainsi $\int_0^{\frac{1}{e}} (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2}\,dt$ converge.

D'autre part, $(1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2} \underset{t\to +\infty}{\sim} |\ln(t)|\, t^{c-2}$

Comme $c<1$, $2-c>2-1=1$ et d'après le

rappel $\int_e^{+\infty} |\ln(t)|\, t^{c-2}\,dt$ converge

Ainsi $\int_e^{+\infty} |\ln(t)|(1-e^{-t})\, t^{c-2}\,dt$ converge.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1-e^{-t})|\ln(t)|\, t^{c-2}\,dt$ converge

pour tout $c \in]0,1[$.

On en déduit donc que

$$\int_0^{+\infty} (1-e^{-t})|\ln(t)|(t^{a-2}+t^{b-2})dt \text{ converge.}$$

On peut alors appliquer le théorème du cours qui affirme que H est de classe C^1 sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$,

$$H'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Comme ceci est vrai pour tout a, b, $0<a<b<1$, on en déduit que H est de classe C^1 sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[, \quad H'(x) = \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})\ln(t)\, t^{x-2}\,dt.$$

c) Soit $\alpha > 0$. i) En utilisant l'inégalité rappelée $1-e^{-u} \leq u$, $\forall u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^{\alpha} (1-e^{-t})\,t^{x-2}\,dt \leq \int_0^{\alpha} t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}\left[t^x\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^x}{x},$$

car $\lim\limits_{t \to 0^+} t^x = \lim\limits_{t \to 0^+} e^{x\ln(t)} = 0$ car $x>0$.

De plus, $\forall\ t \in [0, \alpha]$, $e^{-t} \leq 1$

et donc $(1 - e^{-t})\, t^{x-2} \geqslant 0$

Ainsi $$\int_0^{\alpha} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \geqslant 0.$$

Finalement, on a :

$$0 \leq \int_0^{\alpha} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^2}{x}.$$

(ii) Pour tout $t \in [\alpha, +\infty[$, on a :

$$0 \leq e^{-t} \leq e^{-\alpha}$$

d'où

$$1 - e^{-\alpha} \leq 1 - e^{-t} \leq 1$$

Ainsi $$(1 - e^{-\alpha}) \int_{\alpha}^{+\infty} t^{x-2}\, dt \leq \int_{\alpha}^{+\infty} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \leq \int_{\alpha}^{+\infty} t^{x-2}\, dt$$

Or $$\int_{\alpha}^{+\infty} t^{x-2}\, dt = \frac{1}{x-1} \left[t^{x-1} \right]_{\alpha}^{+\infty} = \frac{\alpha^{x-1}}{1-x},$$

car $$\lim_{t \to +\infty} t^{x-1} = \lim_{t \to +\infty} e^{(x-1)\ln(t)} = 0 \quad \text{car } x < 1.$$

Ainsi $$(1 - e^{-\alpha}) \frac{\alpha^{x-1}}{1-x} \leq \int_{\alpha}^{+\infty} (1 - e^{-t})\, t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^{x-1}}{1-x}.$$

d) On a :

$$H(x) = \int_0^{+\infty} (1-e^{-t})\, t^{x-2}\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha} (1-e^{-t})\, t^{x-2}\, dt + \int_{\alpha}^{+\infty} (1-e^{-t})\, t^{x-2}\, dt$$

En utilisant c), on en déduit que

$$(1-e^{-\alpha})\frac{\alpha^{x-1}}{1-x} \leq H(x) \leq \frac{\alpha^{x}}{x} + \frac{\alpha^{x-1}}{1-x}.$$

Multiplions par $1-x \geq 0$ cette inégalité ; on obtient alors

$$(1-e^{-\alpha})\alpha^{x-1} \leq (1-x)H(x) \leq \alpha^{x}\frac{1-x}{x} + \alpha^{x-1}.$$

e) D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\liminf_{x \to 1^-} (1-x)H(x) \geq \liminf_{x \to 1^-} (1-e^{-\alpha})\alpha^{x-1} = 1-e^{-\alpha}$$

De même, avec l'inégalité précédente, on a aussi

$$\limsup_{x \to 1^-} (1-x)\, H(x) \leq \limsup_{x \to 1^-} \left(\alpha^{x}\frac{1-x}{x} + \alpha^{x-1}\right)$$

$$= 1.$$

Finalement, on obtient que $\forall \alpha > 0$, on a :

$$1-e^{-\alpha} \leq \liminf_{x \to 1^-} (1-x)\, H(x) \leq \limsup_{x \to 1^-} (1-x)\, H(x) \leq 1.$$

Faisons tendre $\alpha \longrightarrow +\infty$, dans l'inégalité précédente

ce qui donne

$$1 \leq \liminf_{x \to 1^-} (1-x) H(x) \leq \limsup_{x \to 1^-} (1-x) H(x) \leq 1$$

Ainsi $\liminf_{x \to 1^-} (1-x) H(x) = \limsup_{x \to 1^-} (1-x) H(x) = 1$.

On en déduit que $(1-x) H(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 1$.

Autrement dit $H(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$.