Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies — Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2021-2022
M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 1

Samedi 13 novembre
Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t))\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

c) En déduire que F est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

d) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(u) \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24}.$$

Indication : on pourra soit utiliser une formule de Taylor soit étudier la fonction $\varphi(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \cos(u)$ *en étudiant ses variations sur* $[0, +\infty[$.

e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) \leq \pi \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}\right).$$

Indication : on utilisera sans démonstration les formules suivantes :

$$\sin^2(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2t)\right) \quad \textit{et} \quad \sin^4(t) = \frac{1}{8}\left(3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)\right).$$

f) En utilisant c) et e), en déduire que l'équation

$$\int_0^{\pi} \cos(x \sin(t))\, dt = 0$$

a une unique solution $x \in [0, \pi]$.
Indication : on pourra montrer que $F(2\sqrt{2}) \leq 0$ *et remarquer que* $2\sqrt{2} \leq \pi$.

Exercice 2. Pour $0 < x < 1$, on pose

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt.$$

a) Montrer que H est bien définie sur $]0, 1[$.

T.S.V.P.

b) Montrer que H est de classe C^1 sur $]0,1[$ et pour $0 < x < 1$, exprimer $H'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

Indication : on pourra utiliser (sans les démontrer) les résultats de convergence suivants sur les intégrales de Bertrand :

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}\, dt \textit{ converge} \iff (\alpha > 1) \textit{ ou } (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1);$$

$$\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}\, dt \textit{ converge} \iff (\alpha < 1) \textit{ ou } (\alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1);$$

c) Fixons $\alpha > 0$.

(i) Montrer que pour tout $0 < x < 1$, on a

$$0 \leq \int_0^\alpha \left(1 - e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^x}{x}.$$

Indication : on pourra utiliser (sans la démontrer) l'inégalité suivante : pour tout $u \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-u} \leq u$.

(ii) Montrer que pour tout $0 < x < 1$, on a

$$\left(1 - e^{-\alpha}\right) \frac{\alpha^{x-1}}{1-x} \leq \int_\alpha^{+\infty} \left(1 - e^{-t}\right) t^{x-2}\, dt \leq \frac{\alpha^{x-1}}{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout $\alpha > 0$ et tout $0 < x < 1$, on a

$$\left(1 - e^{-\alpha}\right) \alpha^{x-1} \leq (1-x)H(x) \leq \frac{\alpha^x}{x}(1-x) + \alpha^{x-1}. \tag{1}$$

e) Conclure que lorsque $x \to 1^-$, $H(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{1-x}$.

Indication : on pourra utiliser :

- *l'inégalité de gauche dans* (1) *pour minorer* $\liminf_{x \to 1^-} (1-x)H(x)$
- *et l'inégalité de droite dans* (1) *pour majorer* $\limsup_{x \to 1^-} (1-x)H(x)$.