Université de Lille
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département de Mathématiques

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2022-2023
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

DEVOIR SURVEILLÉ 1

Mardi 8 novembre 2022
Correction

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 - \cos^2(t))\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie, de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

On introduit la fonction $f :]1, +\infty[\times[0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,t) = \ln(x^2 - \cos^2(t)), \qquad (x,t) \in]1, +\infty[\times[0, \pi/2].$$

Remarquons que $\forall x > 1$ *et* $\forall 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, *on a* $x^2 - \cos^2(t) \ge x^2 - 1 > 0$. *Ainsi, la fonction* f *est continue sur* $]1, +\infty[\times[0, \pi/2]$ *comme composée de fonctions continues. De plus, pour tout* $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, *la fonction* $x \longmapsto f(x,t) = \ln(x^2 - \cos^2(t))$ *est dérivable sur* $]1, +\infty[$ *et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2x}{x^2 - \cos^2(t)}, \qquad \forall (x,t) \in]1, +\infty[\times[0, \pi/2].$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe et est continue sur* $]1, +\infty[\times[0, \pi/2]$. *Le théorème de dérivabilité des intégrales définies à paramètres implique que* F *est bien définie et de classe* C^1 *sur* $]1, +\infty[$. *De plus, pour* $x > 1$, *on a*

$$F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{x^2 - \cos^2(t)}\, dt.$$

b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Effectuons le changement de variable $u = \tan(t)$ *dans l'intégrale donnant* $F'(x)$. *Rappelons que* $\cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{1+u^2}$ *et* $dt = \frac{du}{1+u^2}$. *D'où*

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{1}{1+u^2}} \frac{1}{1+u^2}\, du.$$

T.S.V.P.

Ainsi, pour $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2(1+u^2)-1}\, du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^2u^2+x^2-1}\, du \\ &= \frac{2x}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{x^2}{x^2-1}u^2}\, du. \end{aligned}$$

Effectuons alors le deuxième changement de variable $v = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}u$. On obtient alors que pour $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2x}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dv \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} [\arctan(v)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$

c) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x > 1$, on a

$$F(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

Considérons $G :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x > 1$ par $G(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Il est clair que G est dérivable sur $]1, +\infty[$ et on a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \pi \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \pi \frac{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= F'(x). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x > 1$, on a $F(x) = G(x) + C$, c'est-à-dire

$$F(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C, \qquad x > 1.$$

d) Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\cos^2(t)}{x^2}\right) dt = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) + C. \tag{1}$$

D'après la question précédente, pour tout $x > 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 - \cos^2(t))\, dt = \pi \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C. \tag{2}$$

Écrivons que $\ln(x^2-\cos^2(t)) = \ln(x^2(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})) = 2\ln(x)+\ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})$. *D'où*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2-\cos^2(t))\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ln(x)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt\\ &= \pi\ln(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt.\end{aligned}$$

En utilisant (2), *on obtient alors que*

$$\pi\ln(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C,$$

soit

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2})\,dt &= \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - \pi\ln(x) + C\\ &= \pi\ln\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) + C\\ &= \pi\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) + C.\end{aligned}$$

e) En déduire la valeur de C.

Remarquons que le terme à droite dans (1) *tend vers* $\pi\ln(2)+C$ *quand* $x\to+\infty$. *D'autre part, pour tout* $0\le t\le\pi/2$ *et* $x>1$, *on a*

$$1-\frac{1}{x^2} \le 1-\frac{\cos^2(t)}{x^2} \le 1,$$

et par croissance de la fonction logarithme sur $]0,+\infty[$, *on obtient*

$$\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \le \ln\left(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2}\right) \le 0.$$

Ainsi en intégrant par rapport à $t\in[0,\pi/2]$, *on en déduit que :*

$$\frac{\pi}{2}\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1-\frac{\cos^2(t)}{x^2}\right)\,dt \le 0.$$

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que, lorsque $x\to+\infty$, *le terme à gauche dans* (1) *tend vers* 0. *Ainsi* $\pi\ln(2)+C=0$, *soit* $C=-\ln(2)$.

f) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt.$$

converge et, en supposant que F est continue à droite en $x=1$, calculer la valeur de I.

D'une part, la fonction $t \longmapsto \ln(\sin(t))$ *est continue sur* $]0, \pi/2]$*, donc localement intégrable sur* $]0, \pi/2]$*. De plus, pour tout* $t \in]0, \pi/2]$*,* $t \neq 1$*, écrivons que*

$$\ln(\sin(t)) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t) = \ln(t)\left(1 + \frac{\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)}{\ln(t)}\right).$$

Ceci montre que $\ln(\sin(t)) \sim \ln(t)$ *lorsque* $t \to 0^+$*. Comme pour* $0 < t < 1$*, on a* $\ln(t) < 0$*, on peut utiliser la règle des équivalents et on obtient que* $\int_0^1 \ln(\sin(t))\,dt$ *converge si et seulement si* $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *converge. La convergence de* $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *peut alors se prouver de plusieurs manières. Par exemple, on peut remarquer que la fonction* $t \longmapsto \ln(t)$ *est continue sur* $]0, \pi/2]$*, donc localement intégrable sur* $]0, \pi/2]$*. De plus, on a* $\ln(t) = o(t^{-1/2})$*,* $t \to 0^+$*. Or l'intégrale*

$$\int_0^{\pi/2} t^{-1/2}\,dt$$

converge car $1/2 < 1$ *et donc par les théorèmes de comparaison l'intégrale*

$$\int_0^{\pi/2} \ln(t)\,dt$$

converge absolument donc converge. Finalement, on en déduit que I *converge. D'après les questions c) et e), on a*

$$F(x) = \pi\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \pi\ln(2).$$

Comme F *est supposée continue à droite en* 1*, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \cos^2(t))\,dt = F(1) &= \lim_{x \to 1^+} F(x) \\ &= \lim_{x \to 1^+} \pi\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \pi\ln(2) \\ &= -\pi\ln(2).\end{aligned}$$

En utilisant que $1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$*, on a, pour* $t \in]0, \pi/2]$*,* $\ln(1 - \cos^2(t)) = 2\ln(\sin(t))$ *et on en déduit que*

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,dt = -\frac{\pi\ln(2)}{2}.$$

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x > 0$*, la fonction* $t \longmapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ *est positive et continue sur* $[0, +\infty[$*. Donc elle est localement intégrable sur* $[0, +\infty[$*. De plus, pour tout* $t > 0$*, on*

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-xt}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ *converge (car par exemple* $\int_0^A e^{-xt}\,dt = -\frac{1}{x}[e^{-xt}]_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{x}(1-e^{-xA}) \to \frac{1}{x}$ *lorsque* $A \to +\infty$*). Finalement, le théorème de comparaison (pour les fonctions positives) permet de conclure que l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$$

converge pour tout $x > 0$*. Ainsi* F *est bien définie sur* $]0,+\infty[$*.*

b) Soit $a > 0$. Montrer que F est de classe C^1 sur $]a,+\infty[$.

Considérons la fonction $f :]a,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t} \qquad \forall (x,t) \in]a,+\infty[\times[0,+\infty[.$$

La fonction f *est continue sur* $]a,+\infty[\times[0,+\infty[$ *et par la question a), l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

converge pour tout $x > a$*. De plus, pour tout* $t \geq 0$*, la fonction* $x \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t}$ *est dérivable sur* $]a,+\infty[$ *et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-xt}}{1+t}, \qquad \forall (x,t) \in]a,+\infty[\times[0,+\infty[.$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe et est continue sur* $]a,+\infty[\times[0,+\infty[$*. Finalement, pour tout* $(x,t) \in]a,+\infty[\times[0,+\infty[$*, on a*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{te^{-xt}}{1+t} \leq e^{-at}.$$

La dernière inégalité vient du fait que $t/(1+t) \leq 1$*, du fait que* $-xt \leq -at$ *et de la croissance de l'exponentielle. On a déjà remarqué que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ *converge.*
Le théorème de dérivabilité des intégrales généralisées à paramètres permet alors d'affirmer que F *est de classe* C^1 *sur* $]a,+\infty[$ *et pour tout* $x > a$*, on a*

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

c) En déduire que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

Soit $x_0 > 0$*. On peut alors choisir* $a > 0$ *tel que* $x_0 \in]a,+\infty[$ *(on peut prendre par exemple* $a = x_0/2$*). La question b) permet d'affirmer que* F *est de classe* C^1 *sur* $]a,+\infty[$ *donc au voisinage de* x_0 *et on a*

$$F'(x_0) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-x_0t}}{1+t}\,dt.$$

Ceci est valable pour tout $x_0 > 0$ et donc on en déduit que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t}\, dt.$$

d) Montrer que F vérifie l'équation :

$$\forall x > 0, \qquad xF'(x) = xF(x) - 1.$$

Pour tout $x > 0$, on déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t}\, dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{(t+1-1)e^{-xt}}{1+t}\, dt \\ &= -\int_0^{+\infty} \left(e^{-xt} - \frac{e^{-xt}}{1+t}\right) dt \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt. \end{aligned}$$

Remarquons qu'on peut séparer en deux intégrales dans la dernière égalité car on sait que les deux intégrales convergent. On en déduit alors que

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt + F(x),$$

et d'après le calcul effectué à la question a), on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$. Ainsi, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{x} + F(x),$$

et en multipliant par x, on en déduit le résultat.

e) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x},$$

et en déduire que F a une limite en $+\infty$ qu'on précisera.

Remarquons que pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq e^{-xt}.$$

En intégrant par rapport à $t \in [0, +\infty$, on en déduit que

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt,$$

et en utilisant une nouvelle fois que $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$*, on obtient que*

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}, \qquad x > 0.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$*, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que* F *a une limite en* $+\infty$ *et que*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

f) Soit $A > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) \geq e^{-Ax} \ln(1 + A).$$

Pour tout $x > 0$ *et tout* $A > 0$*, on a*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt \geq \int_0^{A} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt.$$

De plus, pour tout $t \in [0, A]$ *et* $x > 0$*, on a* $-Ax \leq -xt$ *et par croissance de l'exponentielle, on a* $\mathrm{e}^{-Ax} \leq \mathrm{e}^{-xt}$*. Donc*

$$e^{-Ax}\frac{1}{1+t} \leq \frac{e^{-xt}}{1+t}.$$

En intégrant par rapport à $t \in [0, A]$*, on en déduit que*

$$e^{-Ax} \int_0^{A} \frac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^{A} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt \leq F(x).$$

Par un calcul immédiat, on obtient finalement que

$$e^{-Ax} \ln(1 + A) \leq F(x), \qquad x > 0,\ A > 0.$$

g) En déduire que $\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty$.

On déduit de la question précédente que pour tout $A > 0$*, on a*

$$\liminf_{x\to0^+} F(x) \geq \ln(1 + A).$$

On fait alors tendre $A \to +\infty$*, ce qui permet d'en déduire que*

$$\liminf_{x\to0^+} F(x) = +\infty,$$

et donc comme $\limsup_{x\to0^+} F(x) \geq \liminf_{x\to0^+} F(x)$*, on obtient que* $\liminf_{x\to0^+} F(x) = \limsup_{x\to0^+} F(x) = +\infty$*. Ceci permet finalement de conclure que* F *a une limite à droite en* 0 *qui vaut*

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty.$$

Remarquez qu'on est obligé a priori de passer par les limites sup et inf car on ne sait pas si la limite existe...