Université de Lille
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques- Semestre 5 2022-2023
M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 1

Mardi 8 novembre 2022
Durée : 2 heures

Les deux exercices sont indépendants et pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction qui entrera en ligne de compte dans la notation.

Exercice 1. Pour $x > 1$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 - \cos^2(t))\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie, de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a

$$F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Indication : dans la formule donnant $F'(x)$ sous forme d'une intégrale, on pourra poser le changement de variable $u = \tan(t)$.

c) Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x > 1$, on a

$$F(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$$

d) Montrer que, pour tout $x > 1$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{\cos^2(t)}{x^2}\right) dt = \pi \ln\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) + C. \tag{1}$$

e) En déduire la valeur de C.
Indication : on pourra faire tendre x vers $+\infty$ dans l'équation (1) et pour le terme à gauche dans (1) utiliser un encadrement.

f) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt.$$

converge et, en supposant que F est continue à droite en $x = 1$, calculer la valeur de I.

T.S.V.P.

Exercice 2. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que F est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$.

c) En déduire que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

d) Montrer que F vérifie l'équation :

$$\forall x > 0, \qquad xF'(x) = xF(x) - 1.$$

e) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x},$$

et en déduire que F a une limite en $+\infty$ qu'on précisera.

f) Soit $A > 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) \geq e^{-Ax} \ln(1 + A).$$

g) En déduire que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$.