Correction du DS 2 de l'année universitaire 2020-2021

Exercice 1 : ⓐ Soit $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,u) \longmapsto g(x,u) = \frac{\cos(xu)}{1+u^2}$$

L'application g est définie et continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (comme quotient de 2 fonctions continues sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dont le dénominateur $1+u^2$ ne s'annule pas)

De plus, $\forall (x,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a :

$$|g(x,u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$$

et la fonction $u \longmapsto \frac{1}{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et sa intégrale généralisée sur $\mathbb{R}$ converge (car par exemple, on a

$$\int_A^B \frac{1}{1+u^2}\,du = \left[\arctan(u)\right]_A^B = \arctan(B) - \arctan(A) \xrightarrow[\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}]{} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$)

D'après le théorème du cours sur la continuité des intégrales généralisées à paramètres, on en déduit que G est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|G(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\cos(xu)|}{1+u^2}\, du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} = \pi .$$

Cette inégalité implique que G est bornée.

b) Soit $f :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}.$$

La fonction f est bien définie et continue sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$

(Notez que $x^2+t^2 \geq x^2 > 0$).

Fixons $0 < a < b$. Pour tout $x \in]a,b[$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x,t)| = \left|\frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}\right| \leq \frac{x}{x^2+t^2} \leq \frac{b}{a^2+t^2}$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{b}{a^2+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{a^2+t^2} dt$ converge.

En effet, on peut par exemple remarquer ("comme" précédemment) que

$$\int_A^B \frac{b}{a^2+t^2} dt = \frac{1}{a^2} \int_A^B \frac{b}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} dt$$

$$= \frac{b}{\cancel{a^2}} \left[\cancel{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right)\right]_A^B$$

$$= b\left(\arctan\left(\frac{B}{a}\right) - \arctan\left(\frac{A}{a}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{B \to +\infty \\ A \to -\infty}]{} b\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = b\pi.$$

Finalement, on peut aussi appliquer le théorème de continuité de intégrale généralisées à paramètre qui donne que la fonction

F est bien définie et continue sur $]a, b[$, pour tous $0 < a < b$.

Maintenant si $x_0 \in]0, +\infty[$, on peut choisir a et b tels que $0 < a < x_0 < b$ [par exemple $a = \frac{x_0}{2}$ et $b = x_0 + 1$!].

Ce qui précède montre que F est bien définie et continue sur $]a, b[$ donc en particulier F est bien définie et continue en x_0.

Ceci étant vrai pour tout $x_0 > 0$, on en déduit que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(c) Soit $x > 0$. Fixons $A < B$.

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} [A, B] & \longrightarrow & [xA, xB] \\ u & \longmapsto & \varphi(u) = xu \end{array}$

est une bijection de classe C^1 et la formule de changement de variable s'applique et donne

$$\int_A^B \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,du = \frac{1}{x}\int_A^B \frac{\cos(\varphi(u))}{1+\frac{\varphi(u)^2}{x^2}}\varphi'(u)\,du$$

$$= \frac{1}{x}\int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} \frac{\cos(t)}{1+\frac{t^2}{x^2}}\,dt$$

D'où finalement

$$\int_A^B \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\,du = x\int_{xA}^{xB} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2}\,dt.$$

Faisons alors tendre $A \longrightarrow -\infty$ et $B \longrightarrow +\infty$. Compte tenu de la question a) et b), le terme à gauche tend vers $G(x)$ et le terme à droite vers $F(x)$. Ainsi $\forall x>0$, $F(x) = G(x)$.

Remarque: On pouvait aussi faire le changement de variable dans l'intégrale généralisée et ne pas être si précautionneux pour ce changement de variable simple...

(d) On sait d'après la question (a) que $\forall x \in \mathbb{R}, |G(x)| \leq \pi$

De plus, d'après la question (c), on sait que $\forall x > 0$, $F(x) = G(x)$.

Ainsi $\forall x > 0$, $|F(x)| \leq \pi$ et donc F est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, G est continue sur $\mathbb{R}$ (voir question (a)) donc

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} G(x) = \lim_{x \to 0} G(x) = G(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \pi$$

Donc $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} F(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} G(x) = \pi$.

Ainsi si on pose $F(0) = \pi$, on obtient un prolongement continue de F sur $[0, +\infty[$.

e) La fonction $f :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, t) \longrightarrow f(x,t) = \frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}$$

est bien définie et continue sur $]0;+\infty[\times \mathbb{R}$ et d'après b) l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}\,dt \text{ converge.}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,t) = \dfrac{x\cos(t)}{x^2+t^2}$ est dérivable

sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\cos(t)\left(x^2+t^2-2x^2\right)}{(x^2+t^2)^2} = \frac{\cos(t)\left(t^2-x^2\right)}{(x^2+t^2)^2}$$

En particulier, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $]0;+\infty[\times \mathbb{R}$

Enfin, fixons $0 < a < b$. Pour tout $x \in]a,b[$ et $t \in \mathbb{R}$, On a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{\cos(t)(t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^2}\right|$

$$\leq \frac{|t^2-x^2|}{(t^2+x^2)^2} \leq \frac{t^2+x^2}{(t^2+x^2)^2} = \frac{1}{t^2+x^2}$$

($|\cos t| \leq 1$!)

inégalité triangulaire

$$\leq \frac{1}{t^2+a^2}$$

De plus, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+a^2}\,dt$ converge (on l'a déjà montré plusieurs fois...).

Le théorème de dérivation des intégrales généralisées à paramètres s'appliquent et donne que F est de classe C^1 sur $]a,b[$ et pour tout $x \in]a,b[$, on a :

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t)\left(t^2-x^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^2}\,dt$$

On va réappliquer ce théorème une deuxième fois.

L'application $\frac{\partial f}{\partial x} :]a,b[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\cos(t)\left(t^2-x^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^2}$$

est continue sur $]a,b[\times\mathbb{R}$ et $\forall x \in]a,b[$,

l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ converge.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est dérivable

sur $]a,b[$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(t)\,\frac{-2x\left(x^2+t^2\right)^{\cancel{2}} - \left(t^2-x^2\right)2\times 2x\,\cancel{\left(x^2+t^2\right)}}{\left(x^2+t^2\right)^{\cancel{4}\,3}}$

soit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -2x\cos(t)\,\dfrac{3t^2 - x^2}{(t^2+x^2)^3}$

En particulier, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ existe et est continue sur $]a,b[\times\mathbb{R}$.

Enfin, $\forall x\in]a,b[$, $\forall t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \frac{2x\,|\cos(t)|\,|3t^2-x^2|}{(x^2+t^2)^3} \leq \frac{2b\,(3t^2+x^2)}{(x^2+t^2)^3}$$

on majore $|\cos(t)|$ par 1
x par b et on
utilise l'inégalité Δ pour $3t^2-x^2$.

Remarquons alors que $3t^2+x^2 \leq 3(t^2+x^2)$ et on obtient :

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \frac{6b\,(t^2+x^2)}{(x^2+t^2)^3} = \frac{6b}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{6b}{(a^2+t^2)^2}$$

Or la fonction $t \longmapsto \frac{1}{(a^2+t^2)^2}$ est bien définie, positive, paire et continue sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{(a^2+t^2)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$. Or l'intégrale $\int^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$ converge, donc finalement l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a^2+t^2)^2} dt$ converge.

On peut alors réappliquer le théorème de dérivation et on déduit que F est de classe C^2 sur $]a,b[$, pour tout $0<a<b$ et $\forall x \in]a,b[$, $F''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt$

Un raisonnement similaire à la question b) permet alors de passer de $]a,b[$, $0<a<b$ à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Finalement, on en déduit que F est C^2 sur $]0;+\infty[$ et

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad F''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2x\cos(t)(3t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^3}\,dt.$$

f

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = \frac{x^2+t^2-2x^2}{(x^2+t^2)^2} = \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}\right) = \frac{-2x(x^2+t^2)^{\cancel{2}} - (t^2-x^2)\times 4x\cancel{(x^2+t^2)}}{(x^2+t^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-2x(x^2+t^2+2t^2-2x^2)}{(x^2+t^2)^3}$$

Soit $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = \frac{-2x\left(3t^2-x^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}$$

D'autre part, $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = \frac{-2xt}{\left(x^2+t^2\right)^2}$$

puis $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-2xt}{\left(x^2+t^2\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-2x\left(x^2+t^2\right)^{\cancel{2}} + 2xt \times 4t\,\cancel{\left(x^2+t^2\right)}}{\left(x^2+t^2\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2x\left(4t^2-x^2-t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}$$

$$= \frac{2x\left(3t^2-x^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}$$

Ainsi, on voit que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{x^2+t^2}\right) = -\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{x}{x^2+t^2}\right)$.

g) D'après la question e), F est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$, on a :

$$F''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)dt$$

$$\underset{\text{avec e)}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t)\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)dt.$$

On va maintenant réaliser deux intégrations par parties. Dans ce qui suit, x est fixé >0 et les fonctions considérées sont vues comme fonction de la variable t.

$$u(t) = -\cos(t) \qquad u'(t) = \sin(t)$$

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) \qquad v'(t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)$$

On obtient alors :

$$F''(x) = \left[-\cos(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)dt$$

On recommence

$$u(t) = -\sin(t) \qquad u'(t) = -\cos(t)$$

$$v(t) = \frac{x}{x^2+t^2} \qquad v'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)$$

D'où

$$F''(x) = \left[-\cos(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \left[\frac{x\sin(t)}{x^2+t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(t)}{x^2+t^2}dt}_{F(x)}$$

Il reste à justifier que les 2 termes entre [ ] sont nuls.

On a $$\left|\frac{x\sin(t)}{x^2+t^2}\right| \leq \frac{x}{x^2+t^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$$

D'où $$\left[\frac{x\sin(t)}{x^2+t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

De plus, $$-\cos(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = \frac{2xt\cos(t)}{(x^2+t^2)^2}$$

et donc $$\left|-\cos(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\right| \leq \frac{2xt}{(x^2+t^2)^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0.$$

D'où $$\left[-\cos(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

On conclut donc que $\forall x>0$, $F''(x) = F(x)$.

Ceci montre donc que F est sur $]0;+\infty[$ une solution de (E).

h) Par le rappel, on en déduit qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x}.$$

Supposons que $k_1 \neq 0$. Alors $\lim_{x \to +\infty} F(x) = k_1 \times \lim_{x \to +\infty} e^{x} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k_1 > 0 \\ -\infty & \text{si } k_1 < 0 \end{cases}$

ce qui contredit le fait que F est borné (question d)).

Ainsi $k_1 = 0$ et donc $F(x) = k_2 e^{-x}$, $x > 0$.

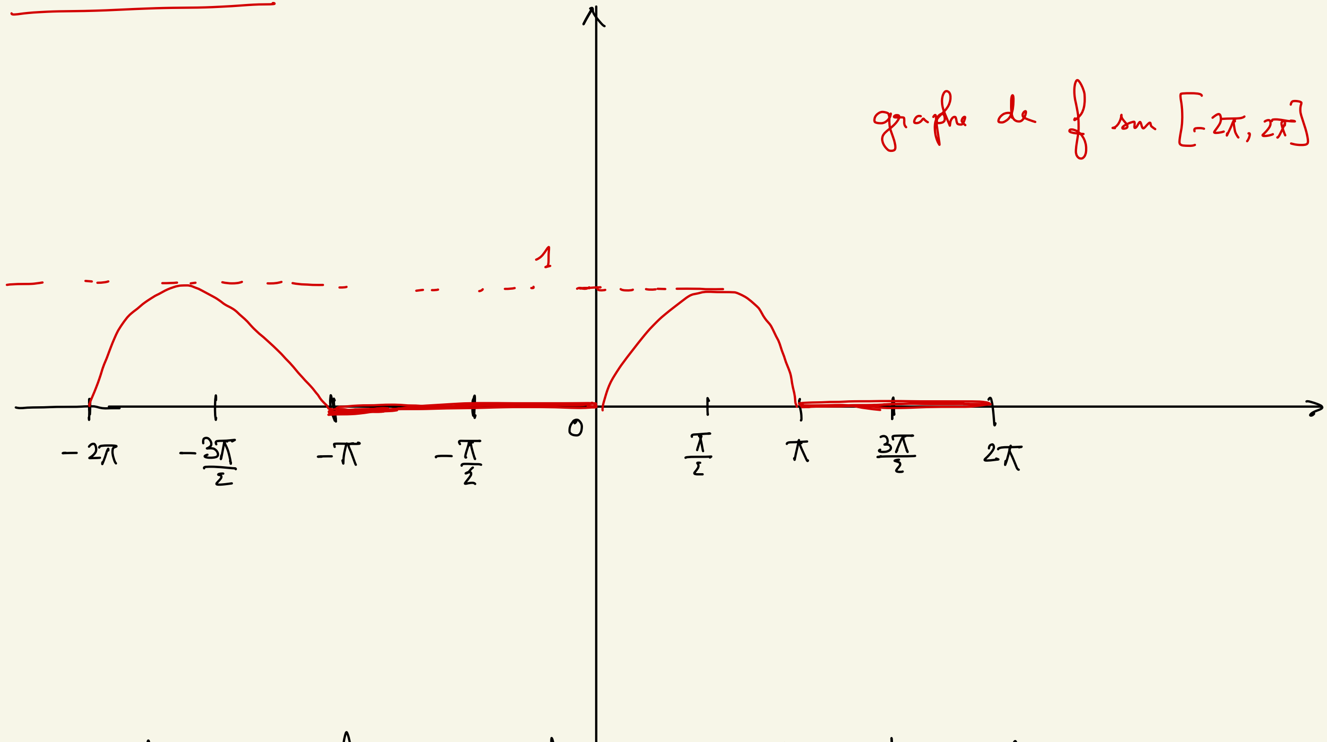
D'après la question d), on a aussi que

$$\pi = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} k_2 e^{-x} = k_2$$

Finalement, on conclut que $\forall x > 0$, $F(x) = \pi e^{-x}$.

Exercice 2

(a)



La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux.

<u>Remarque</u>: En fait, elle est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et aux points

$x_k = k\pi$, la dérivée admet une limite à droite et à gauche en chacun des points x_k.

b) On a : $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}$

De plus, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\sin((n+1)t) + \sin((1-n)t)\Big)\,dt$$ avec la formule rappelé,

- pour $n=1$: $a_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

- pour $n \geqslant 2$. $a_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos((n+1)t)}{n+1} + \frac{-\cos((1-n)t)}{1-n}\right]_0^{\pi}$

Pour $n \geq 2$, $\quad a_n = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1} + \frac{\cos((1-n)\pi)}{1-n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1-n}\right)$

Remarquons alors que

pour $n \geq 2$, $\quad \cos((n+1)\pi) = \cos(n\pi + \pi) = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$$= (-1)^{n+1}$$

et $\quad \cos((1-n)\pi) \underset{\text{par parité}}{=} \cos((n-1)\pi) \underset{\text{par périodicité}}{=} \cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1}$

D'où pour $n \geq 2$, $\quad a_n = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1-n}\right)$

$$= +\frac{1}{2\pi}\left((-1)^n + 1\right)\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n + 1}{(1-n^2)\pi}$$

Finalement, on voit que :

pour $k \geq 1$, $a_{2k} = \dfrac{2}{\pi(1-4k^2)}$

pour $k \geq 0$, $a_{2k+1} = 0$

Enfin, pour $n \geq 1$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\cos\big((1-n)t\big) - \cos\big((1+n)t\big)\Big)\,dt$$

- pour $n = 1$:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\big(1 - \cos(2t)\big)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi}$$

soit $b_1 = \dfrac{1}{2}$

• pour $n \geq 2$, $b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((1-n)t)}{1-n} - \frac{\sin((1+n)t)}{1+n}\right]_0^\pi$

$= 0$ car $\sin(k\pi) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

ⓒ La série de Fourier de f est donnée par la série suivante:

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \sum_{k \geq 1} \frac{2}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kt).$$

D'autre part, comme on l'a vu à la question ⓐ, la fonction f est continue et C^1 par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, on sait alors que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ (en fait, on a même la convergence normale d'après le cours avec ces hypothèses).

Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{1-4k^2}.$$

d) En $t = \frac{\pi}{2}$, la question précédente donne

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1-4k^2}$$

Or $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

D'où

$$\frac{1}{2}\ \cancel{1} = \frac{1}{\pi} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}$$

En multipliant par $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}.$$

(e) On va appliquer le théorème de Parseval : la fonction f est continue. Donc le théorème de Parseval implique que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2(1-4k^2)^2}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

D'autre part, par un calcul direct, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}.$$

Finalement, on en déduit :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

soit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right)$$

$$= \frac{\cancel{\pi^2}}{2} \frac{\pi^2 - 8}{8\cancel{\pi^2}}$$

soit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}}$$