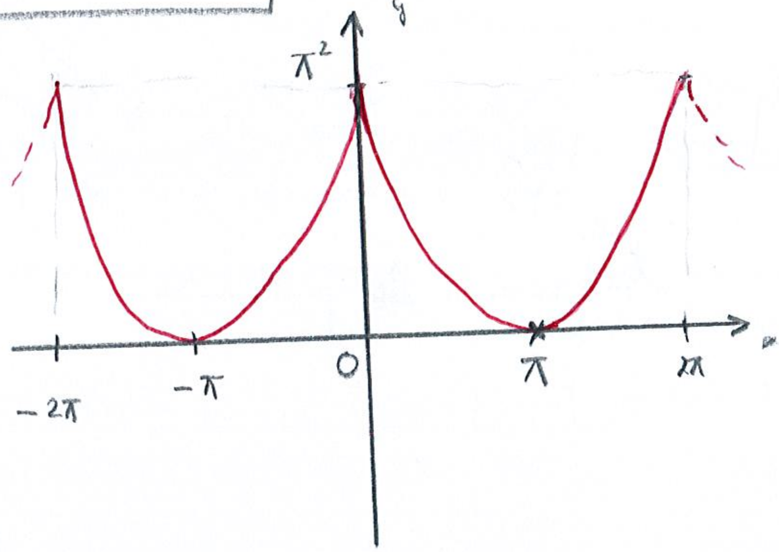
M53 — Intégrales à paramètres — 2021-2022

DS 2 Corrections

Exercice 1

(a)



f est continue sur $\mathbb{R}$

(b) $\mathcal{C}_f$ est symétrique / (Oy) $\Longrightarrow$ f est paire

$\Longrightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{2}\times 3\times\cancel{\pi}} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\cos(nx)\,dx$$

$u(x) = (x-\pi)^2$ $\qquad$ $u'(x) = 2(x-\pi)$

$v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ $\qquad$ $v'(x) = \cos(nx)$

$$\text{IPP} \Longrightarrow \quad a_n = \underbrace{\cancel{\frac{1}{n\pi}\Big[(x-\pi)^2\sin(nx)\Big]_0^{2\pi}}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,dx$$

$u(x) = x-\pi$ $\qquad$ $u'(x) = 1$

$v(x) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$ $\qquad$ $v'(x) = \sin(nx)$

$$\Longrightarrow \quad a_n = \frac{2}{n^2\pi}\Big[(x-\pi)\cos(nx)\Big]_0^{2\pi} - \frac{2}{n^2\pi^2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,dx}_{\substack{\| \\ \frac{1}{n}\left[\sin(nx)\right]_0^{2\pi} \\ =0}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n = \frac{2}{n^2\pi}\Big[\underbrace{\pi\cos(2n\pi) + \pi\cos 0}_{=2\pi}\Big]$$

$$\boxed{a_n = \frac{4}{n^2}, \quad n \geqslant 1}$$

(c) f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux (3)

sur $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ la série de Fourier de f

cons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nx)$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

(d) $\forall x \in [0, 2\pi[$, on a :

$$(*) \quad (x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

(i) Pour $x = \pi$,

$$(*) \Longrightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

(ii) Pour $x = 0$, on a d'après $(*)$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

D'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)\pi^2$$
$$= \frac{2\pi^2}{3\times 4}$$
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 2

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\boxed{\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}}$

Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tq $|x-y| \leq \delta$, on a :
$$|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^\alpha \leq C\,\delta^\alpha = C\,\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

$\Longrightarrow f$ est unif^t continue sur $\mathbb{R}$.

(b) En effectuant le changem^t de variable $u = t+a$,

On a :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-in(u-a)}\,du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-inu}e^{ina}\,du$$
$$= e^{ina}\,\frac{1}{2\pi}\int^{\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du$$

Or $u \longmapsto f(u)e^{-inu}$ est 2π-périodique.

D'où $$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du.$$

Ainsi $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt = e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}\,du$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt = e^{ina}c_n(f)}$$

c) $$c_n(g_a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_a(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-a)e^{-int}\,dt$$

$$\overset{(b)}{=} e^{ina}c_n(f) - e^{-ina}c_n(f)$$

$$= \left(e^{ina} - e^{-ina}\right)c_n(f)$$

$$\boxed{c_n(g_a) = 2i\sin(na)\,c_n(f)}$$

d) On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g_a)|^2$$

$$\underset{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{4}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g_a(t)|^2\,dt$$

On

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_a(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+a)-f(t-a)|^2\,dt$$ 6

Par hypothèse, on a : $|f(t+a)-f(t-a)| \leq C(2a)^\alpha$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_a(t)|^2\,dt \leq \frac{C^2 4^\alpha a^{2\alpha}}{\cancel{2\pi}} \times \cancel{2\pi}$$

D'où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 \leq \frac{C^2 4^\alpha a^{2\alpha}}{4}$$

$$= C^2 4^{\alpha-1} a^{2\alpha}$$

Exercice 3

(a)

$t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$

et de +, comme $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin^2(t)}{t^2} = 1$, la fonct° se

prolonge continûment en 0.

Ainsi $t \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est localement intégrable

sur $[0,+\infty[$.

De +, $\forall t \geqslant 1$, on a : $0 \leq \left|\dfrac{\sin^2(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ cv, le thm de

comparaison $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ cv aussi.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ cv.

(b) (i) D'après (a), F est bien définie en 0

et de +, si $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, t) \longmapsto \dfrac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}$

$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[\times]0,+\infty[}$ (8)

(car $(t+x)^2 \geq t^2 > 0$)

et on a : $\boxed{|f(x,t)| \leq \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}}$

Comme $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt \text{ cv}}$, on peut appliquer le théorème de continuité qui affirme que F est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$

(ii) (•) f est continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ cv, $\forall x \geq 0$

(••) $\forall t > 0$, $x \longmapsto f(x,t) = \dfrac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}$

est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{2\sin^2(t)}{(x+t)^3}$$

De +, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

(∘∘∘) $\forall x \geq x_0 > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2\sin^2(t)}{(x_0+t)^3} = g(t)$$

→ g est continue sur $[0,+\infty[$ donc local intégrable sur $[0,+\infty[$

→ $0 \leq g(t) \leq \frac{2}{t^3}$, $t \geq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt \text{ cv.}$$

D'où $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ cv.

Thm de dérivabilité $\Longrightarrow$ F est C^1 sur $[x_0,+\infty[$ et $\forall x \geq x_0$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Ceci étant vrai $\forall x_0 > 0$, on en déduit que F est C^1 sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x>0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{2\sin^2(t)}{(x+t)^3}\,dt}$$

(iii) On voit que $\forall t \geqslant 0$, $\frac{2\sin^2(t)}{(x+t)^3} \geqslant 0$

D'où $F'(x) \leq 0$, $\forall x > 0$

Donc F est $\searrow$ sur $[0, +\infty[$.

(iv) Remarquons que $\forall x > 0$, $\forall t \geqslant 0$, on a :

$$0 \leq \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{(t+x)^2}$$

D'où

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,dt$$

i.e

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2}\,dt$$

$$= -\left[\frac{1}{t+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

et le Thm des gendarmes implique que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0.}$$

v) On a,

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{1}{x}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \sin^2(t)\left(\frac{1}{(t+x)^2} - \frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)\left[t^2 - (t+x)^2\right]}{(t+x)^2 t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\left(\cancel{t^2} - \cancel{t^2} - x^2 - 2tx\right)dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\left(x + 2t\right)dt$$

$$\leq -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\left(2t + x\right)dt$$

<u>car</u> $\forall t \geq 0, \forall x > 0, \ldots$

$$\frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2} \geq 0$$

et donc $$\int_0^{\pi/2} \frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\,dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\,dt$$

De + , $\forall t \in [0, \pi/2]$, $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$

soit $$\frac{\sin^2(t)}{t^2} \geq \frac{4}{\pi^2}$$

ainsi $$\frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2} \geq \frac{4}{\pi^2}\,\frac{2t+x}{(t+x)^2}$$

soit $$\int_0^{\pi/2} \frac{(2t+x)\sin^2(t)}{(t+x)^2 t^2}\,dt \geq \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t+x}{(t+x)^2}\,dt$$

D'où $$\boxed{\frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} \frac{2t+x}{(t+x)^2}\,dt}$$

(vi) On a :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2t+x}{(t+x)^2}\,dt \geq \int_0^{\pi/2} \frac{t+x}{(t+x)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x}\,dt$$

$$= \Big[\ln(t+x)\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= \ln\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \ln(x)$$

$$= \ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right)$$

D'où

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t+x}{(t+x)^2}\,dt$$

$$\leq -\frac{4}{\pi^2}\ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right)$$

(vii) Faisons tendre $x \longrightarrow 0$.

On a : $\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2x}\right) \longrightarrow +\infty$

D'où $\lim_{x \to 0^>} -\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1+\frac{\pi}{2x}\right) = -\infty$ (14)

et (iv) $\Longrightarrow \lim_{x \to 0^>} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -\infty$

Ainsi $\boxed{F \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0.}$