LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2021-2022
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

DEVOIR SURVEILLÉ 2

Mercredi 12 janvier
Durée : 3 heures

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = (x-\pi)^2$, $x \in [0, 2\pi[$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et préciser le domaine de continuité de f.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f (on précisera bien le type de convergence et la valeur de la somme de la série de Fourier).

d) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, exprimer

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+a) e^{-int}\, dt$$

en fonction du coefficient de Fourier $c_n(f)$ de f.
Indication : on rappelle que pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$.

c) Soit $g_a(t) = f(t+a) - f(t-a)$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g_a)$ en fonction de $c_n(f)$.

d) En déduire que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 \leq C^2 4^{\alpha-1} a^{2\alpha}.$$

Remarque : on peut alors montrer (mais nous ne le ferons pas) que si $\alpha > 1/2$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. a) Justifier que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$$

converge.

T.S.V.P.

b) Pour $x \geq 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{(t+x)^2}\, dt.$$

(i) Montrer que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(ii) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

(iii) Montrer que F est décroissante sur $[0, +\infty[$.

(iv) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a
$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$$
et en déduire la limite de F en $+\infty$.

Le but des questions suivantes est d'étudier la dérivabilité à droite de F en 0.

(v) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{2t + x}{(t+x)^2}\, dt.$$
Indication : on pourra utiliser (sans la redémontrer) l'inégalité de convexité suivante : $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$, $t \in [0, \pi/2]$.

(vi) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{\pi^2} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2x}\right).$$
Indication : dans l'intégrale du (vi), on pourra utiliser que, pour tout $t \geq 0$, on a $2t + x \geq t + x$.

(vii) Conclure.