Licence de Mathématiques- Semestre 5 2022-2023

M53 - Intégrales à paramètres et séries de Fourier

Devoir surveillé 2

Jeudi 5 janvier 2023

Durée : 3 heures

Les deux exercices sont indépendants et pourront être traités dans l'ordre de votre choix. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction qui entrera en ligne de compte dans la notation.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\,dt, \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt.$$

a) Montrer que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et que I converge.

b) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et calculer $f(0)$.

c) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g''(x) = f(x)$.
Indication : on pourra se placer d'abord sur un intervalle du type $]-a,a[$ *où* $a > 0$*, et montrer que* g *est* C^1*, puis que* g' *est* C^1 *sur* $]-a,a[$.

d) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g''(x) - g(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)-1}{t^2}\,dt.$$

Indication : on pourra utiliser que $\frac{1}{t^2(1+t^2)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}$.

e) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a

$$g''(x) - g(x) = \frac{\pi}{2} - xI.$$

Indication : on pourra utiliser que $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

f) En déduire que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et que f est une solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y''(x) - y(x) = 0.$$

g) On admet que si y est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. En déduire que $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$, $x > 0$.
Indication : on utilisera la question b).

h) Justifier que

$$I = g'(0) - \lim_{x \to 0^+} f'(x).$$

i) En déduire finalement la valeur de I.

T.S.V.P.

Exercice 2. Soit $0 < \alpha < \pi$ et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } x \in]-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]. \end{cases}$$

a) Tracer f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f.

c) Etudier la convergence sur $[-\pi, \pi]$ de la série de Fourier de f (on précisera bien le type de convergence et la valeur de la somme de la série de Fourier de f).

d) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\alpha)}{n}.$$

e) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2}.$$

f) On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$ (on admet dans cet exercice que l'intégrale converge).

(i) Montrer que

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt + \frac{\pi - \alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt.$$

Indication : on pourra utiliser que $[0, +\infty[= \bigcup_{n=0}^{+\infty} [n\alpha, (n+1)\alpha[$.

(ii) Considérons la fonction $\varphi(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}$, $t > 0$. Montrer que

$$\lim_{t \to 0^+} t^{3/2} \varphi'(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} t^{3/2} \varphi'(t) = 0.$$

(iii) En déduire qu'il existe une constante $M > 0$ tel que pour tout $t > 0$, on a $|\varphi'(t)| \leq M t^{-3/2}$.

(iv) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sup_{t \in [n\alpha, (n+1)\alpha]} |\varphi'(t)| \leq \frac{M}{(n\alpha)^{3/2}}.$$

(v) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left| \int_0^{\alpha} \left(\frac{\sin^2(n\alpha + t)}{(n\alpha + t)^2} - \frac{\sin^2(n\alpha)}{(n\alpha)^2} \right) dt \right| \leq M \frac{\sqrt{\alpha}}{n^{3/2}}.$$

Indication : on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

(vi) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, on a

$$\left| I - \frac{\pi - \alpha}{2} \right| \leq C \sqrt{\alpha}.$$

(vii) En déduire la valeur de I.