Université de Lille
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Département de Mathématiques

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2020-2021
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

RATTRAPAGE

8 juin 2021
Durée : 3 heures

Exercice 1. Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2(t))\, dt.$$

(a) Justifier que F est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(b) Etudier la dérivabilité de F sur $[0, +\infty[$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme d'une intégrale.

(c) (i) Vérifier que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\sin^2(t) = \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}.$$

(ii) En utilisant le changement de variable $u = \tan(t)$, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$F'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Indication : on pourra utiliser (sans justification) que pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{u^2}{(1+(1+x)u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+(1+x)u^2}\right).$$

(iii) En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a

$$F(x) = \pi\left(\ln(1+\sqrt{1+x}) - \ln(2)\right).$$

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{\cosh^2(t)}\, dt,$$

où on rappelle que $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que G est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = 1 - 4x \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{1 + e^{2t}}\, dt.$$

Indication : on pourra effectuer une intégration par partie.

T.S.V.P.

(d) En déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2(t)}\, dt.$$

Exercice 3. Soit $f(x) = \max(0, \sin(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Préciser le domaine de continuité et de dérivabilité de f.

(c) Etudier la convergence simple et normale de la série de Fourier de f. On précisera bien les hypothèses des théorèmes utilisés.

(d) Calculer les coefficients de Fourier de f.
Indication : on pourra utiliser (sans justification) que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right) \quad \text{et} \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

(e) En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^2-1}.$$