2021 - 2022

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Rattrapage M53} \\ \text{Intégrales à paramètres et séries de Fourier}\end{array}}$$

Exercice 1

ⓐ Définissons

$$g :]0,+\infty[\times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto g(x,t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{x}} f(t), & \text{si } (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,1] \\ 0, & \text{si } (x,t) \in]0,+\infty[\times \{0\} \end{cases}$$

. La fonction g est continue sur $]0,+\infty[\times]0,1[$

. Montrons que g est continue ~~en~~ $(x_0,0)$, $\forall x_0 > 0$

Comme f est continue sur le compact $[0,1]$, elle est bornée.

Notons $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| < +\infty$

Remarquons que $\lim_{t \to 0^+} e^{\frac{\ln(t)}{1+x_0}} = 0$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

(*) $$\boxed{0 < t < \delta \Longrightarrow e^{\frac{\ln(t)}{1+x_0}} \leq \frac{\varepsilon}{M}}$$

Pour $\underset{x>0}{|x - x_0| < 1}$ et $0 < t < \min(\delta, 1)$, on a :

$$\left|g(x,t)-g(x_0,0)\right| = |g(x,t)| = e^{\frac{1}{x}\ln(t)}|f(t)|$$
$$\leq M\, e^{\frac{1}{x}\ln(t)}$$

Or $\underset{x>0}{|x-x_0|<1} \Longrightarrow 0<x<1+x_0$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\ln(t)}{x} < \frac{\ln(t)}{1+x_0} \qquad \left(t<1 \Rightarrow \ln(t)<0\right)$$

$$\Longrightarrow e^{\frac{\ln(t)}{x}} < e^{\frac{\ln(t)}{1+x_0}}$$

Avec $(*)$, on obtient alors que

$$\underset{x>0}{|x-x_0|<1},\ 0<t<\min(\delta,1) \Longrightarrow \left|g(x,t)-g(x_0,0)\right| \leq M.\,e^{\frac{\ln(t)}{1+x_0}}$$
$$\leq M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ainsi <u>g est continue sur $]0,+\infty[\times[0,1]$</u>

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre vu en cours permet alors d'en déduire que F est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$

(b) (i) Pour $x>0$, on a :

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{x}}\,dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{x}{x+1}.$$

(ii) Avec $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| < +\infty$, on a

$$|F(x)| = \left| \int_0^1 t^{1/x} f(t)\,dt \right| \leq \int_0^1 t^{\frac{1}{x}} |f(t)|\,dt$$

$$\leq M \int_0^1 t^{1/x}\,dt = \frac{Mx}{x+1}$$

(iii) Remarquons que $\lim_{x \to 0} \frac{Mx}{x+1} = 0$,

ainsi par le théorème des gendarmes, on a

$\lim_{x \to 0} |F(x)| = 0$ et donc $\lim_{x \to 0} F(x) = 0$.

En posant $F(0) = 0$, on en déduit que F est continue à droite en 0.

ⓒ (i) f est continue à gauche en 1.

Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta$, $0 < \delta < 1$ tel que

$$\delta < t < 1 \Longrightarrow |f(t) - f(1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$\left| \int_\delta^1 t^{1/x} (f(t) - f(1))\,dt \right| \leq \int_\delta^1 t^{1/x} |f(t) - f(1)|\,dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_\delta^1 t^{1/x}\,dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 t^{1/x}\,dt$$

Avec b) i), on en déduit que

$$\left|\int_\delta^1 t^{1/x}(f(t)-f(1))dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{x}{x+1}$$

(ii) On a

$$\left|\int_0^\delta t^{1/x}(f(t)-f(1))dt\right| \leq \int_0^\delta t^{\frac{1}{x}}\,|f(t)-f(1)|\,dt$$

Or $|f(t)-f(1)| \leq |f(t)|+|f(1)| \leq 2M$

D'où $\left|\int_0^\delta t^{1/x}(f(t)-f(1))dt\right| \leq 2M\int_0^\delta t^{1/x}\,dt$

$$= 2M\left[\frac{t^{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}+1}\right]_0^\delta$$

$$= 2M\,\frac{\delta^{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}+1}$$

$$= 2M\,\frac{x}{x+1}\,\delta^{\frac{1}{x}+1}$$

Ainsi $K = 2M$ convient.

(iii) D'après b) i), on a :

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{x}}\,dt = \frac{x}{x+1}$$

D'où

$$f(1) = f(1)\ \frac{x+1}{x}\int_0^1 t^{\frac{1}{x}}\,dt$$

$$= \frac{x+1}{x}\int_0^1 t^{\frac{1}{x}} f(1)\,dt$$

Ainsi

$$\left|\frac{x+1}{x}\int_0^1 t^{\frac{1}{x}} f(t)\,dt - f(1)\right| = \left|\frac{x+1}{x}\left(\int_0^1 t^{\frac{1}{x}}\big(f(t)-f(1)\big)dt\right)\right|$$

$$\leq \frac{x+1}{x}\left(\left|\int_0^\delta t^{\frac{1}{x}}\big(f(t)-f(1)\big)dt\right| + \left|\int_\delta^1 t^{\frac{1}{x}}\big(f(t)-f(1)\big)dt\right|\right)$$

D'après (i) et (ii), on en déduit que

$$\left|\frac{x+1}{x}\int_0^1 t^{\frac{1}{x}} f(t)\,dt - f(1)\right| \leq \frac{x+1}{x}\left[\frac{\varepsilon\, x}{2\,(x+1)} + K\,\frac{x}{x+1}\,\delta^{1/x+1}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + K\,\delta^{1+\frac{1}{x}}$$

Autrement dit,

$$\left|\frac{x+1}{x}F(x) - f(1)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + K\,\delta^{1+\frac{1}{x}}$$

Or $\quad \delta^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(\delta)} \xrightarrow[x \to 0^{>}]{} 0$

Donc il existe $0 < x_0$ tel que

$$0 < x < x_0 \implies \delta^{1+\frac{1}{x}} \leq \frac{\varepsilon}{2K}$$

D'où

$$\left| \frac{x+1}{x} F(x) - f(1) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi $\frac{x+1}{x} F(x) - f(1) \underset{x \to 0}{\underset{>}{\longrightarrow}} 0$.

(iv) D'après (iii), on a

$$\frac{x+1}{x} F(x) - f(1) = o(1)$$

D'où $(x+1) F(x) = x f(1) + o(x)$

soit $F(x) = x f(1) - x F(x) + o(x)$.

Remarquons alors que $F(x) \underset{x \to 0}{\underset{>}{\longrightarrow}} F(0) = 0$ (question b) iii)

D'où $x F(x) = o(x)$ et donc

$$F(x) = x f(1) + o(x), \ x \longrightarrow 0^+$$

d) (i) * La fonction $g :]0,+\infty[\times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $]0,+\infty[\times [0,1]$

* $x \longmapsto g(x,t) = t^{\frac{1}{x}} f(t)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, $\forall t > 0$ et on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln(t)}{x^2}\, t^{\frac{1}{x}} f(t)$$

En particulier $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue

sur $]0,+\infty[\times]0,1]$.

* Fixons $a>0$. Pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1]$,

on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |\ln t||f(t)| \cdot \frac{t^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$\leq |\ln(t)||f(t)| \frac{t^{\frac{1}{x}}}{a^2}$$

De plus, $0<t<1 \Rightarrow t^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(t)} \leq 1$.

D'où $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\ln(t) f(t)|$

et l'intégrale $\int_0^1 |\ln(t) f(t)|\,dt$ converge.

Ainsi le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres vue en cours permet d'en déduire que F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, $\forall a>0$ et

$$F'(x) = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{x^2}\, t^{1/x} f(t)\,dt \quad , \; x \geq a.$$

Comme ceci est vrai pour tout $a>0$, on en déduit que F est de classe C^1 sur

$]0;+\infty[$ et $\forall x>0$,

$$F'(x) = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{x^2}\, t^{1/x} f(t)\,dt.$$

(ii) On a : d'après c) iv)

$$F(x) = x\, f(1) + o(x)\ ,\quad x \longrightarrow 0^+$$

D'où

$$F(x) - F(0) = x\, f(1) + o(x)$$

ainsi

$$\frac{F(x)-F(0)}{x} = f(1) + o(1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} f(1)$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{F(x)-F(0)}{x} = f(1)$$

Autrement dit, F est dérivable à droite en 0 et

$$\boxed{F'_d(0) = f(1)}$$

Exercice 2 (a) Pour $x\in[0,\pi]$, posons

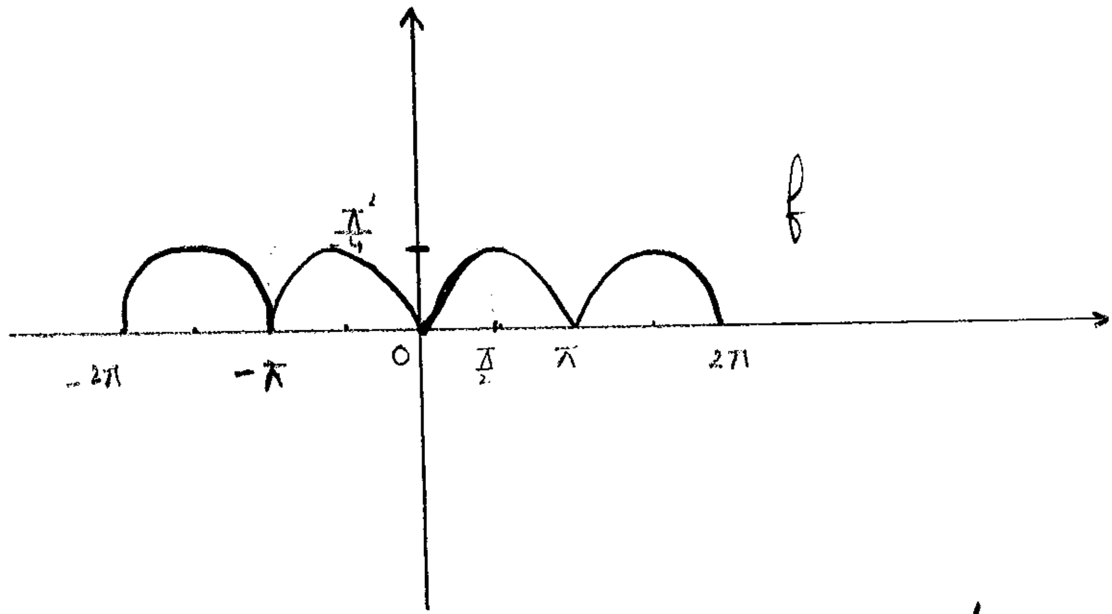
$$f(x) = x(\pi - x).$$

On prolonge f en une fonction paire sur $[-\pi,\pi]$

(i.e pour $x\in[-\pi,0]$, on pose $f(x) = f(-x)$)

puis on prolonge f par 2π-périodicité.

Autrement dit



La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux

Le théorème de Dirichlet affirme alors que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

<u>Calculons les coefficients de Fourier de f</u>

Comme f est paire, $b_n(f) = 0$

De +, $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

Ainsi $$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi^3}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{6} = a_0}$$

Pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(nx)\,dx$$

Effectuons une IPP $\quad u(x) = x(\pi - x) \quad u'(x) = \pi - 2x$

$v'(x) = \cos(nx)$

$v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\frac{1}{n}\,x(\pi - x)\sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\sin(nx)\,dx$$

On effectue une deuxième IPP

$u(x) = \pi - 2x \quad u'(x) = -2$

$v'(x) = -\sin(nx)$

$v'(x) = +\frac{1}{n}\cos(nx)$

D'où

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(\pi - 2x)\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(-\pi\cos(n\pi) - \pi\right) + \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

D'où $a_n = \frac{-2\pi}{\pi n^2} \left(\cos(n\pi) + 1 \right)$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2} & \text{, si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{, si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi la série de Fourier de f est donnée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{4}{(2k)^2} \cos(2kx)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}$$

Le théorème de Dirichlet implique alors que

$\forall x \in [0, \pi]$,

$$x(\pi - x) = f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}$$

b) Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(2k \times \frac{\pi}{2}\right)}{k^2}$$

or $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $k \geq 1$

D'où

$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi
$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$$

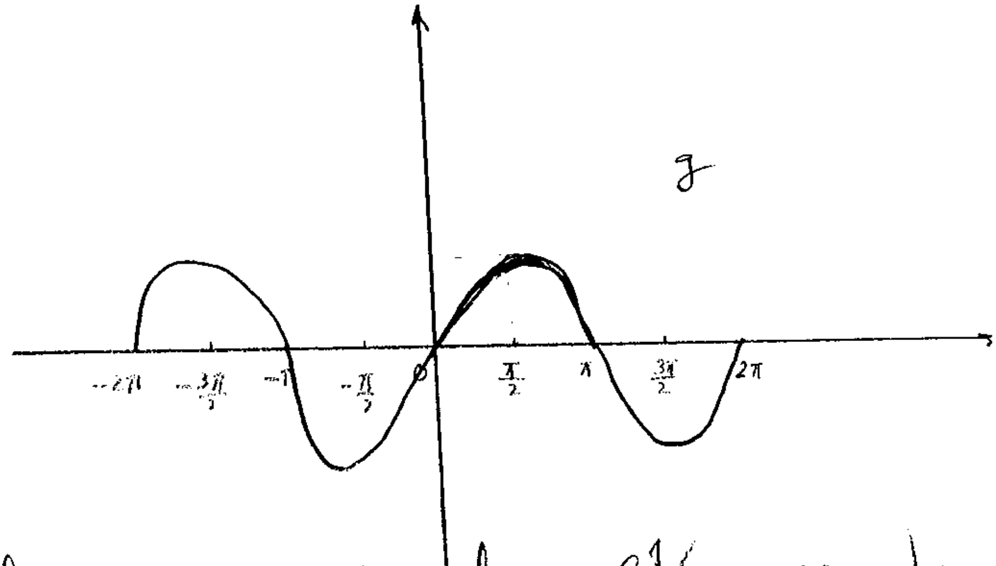
(c) Définissons pour $x \in [0, \pi]$, $g(x) = x(\pi - x)$

puis prolongeons g en une fonction <u>impaire</u> sur $[-\pi, \pi]$

(i.e. pour $x \in [-\pi, 0]$, on pose $g(x) = -g(-x)$)

puis on prolonge g par 2π-périodicité.

Autrement dit :



La fonction g est de classe C^1 (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

Série de Fourier de g

g impair $\Longrightarrow a_n = 0$

Pour $n \geq 1$, $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx)\,dx$$

$u(x) = x(\pi - x)$ $\qquad u'(x) = \pi - 2x$

$v'(x) = \sin(nx)$

$v(x) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$b_n = \underbrace{-\frac{2}{\pi n}\Big[x(\pi - x)\cos(nx)\Big]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos(nx)\,dx$$

$u(x) = \pi - 2x$ $\qquad u'(x) = -2$

$v'(x) = \cos(nx)$

$v(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$b_n = \underbrace{\frac{2}{\pi n^2}\Big[(\pi - 2x)\sin(nx)\Big]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{-4}{\pi n^3}\Big[\cos(nx)\Big]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

Soit $$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Le théorème de Dirichlet implique que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$$

Soit $\forall x \in [0, \pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}$$

d) Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2k+1)^3}$$

Or $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$, d'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi}{8} \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^3}{32}}$$