LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2021-2022
M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

RATTRAPAGE

7 juin 2022
Durée : 3 heures

Exercice 1. On se donne $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ et pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 t^{1/x} f(t)\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) (i) Calculer $\int_0^1 t^{1/x}\, dt$ pour $x > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x > 0$, on a

$$|F(x)| \leq \frac{Mx}{x+1}.$$

(iii) En déduire que F se prolonge par continuité à droite en 0.

c) Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Justifier qu'il existe $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \int_\delta^1 t^{1/x} (f(t) - f(1))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon\, x}{2(x+1)}$$

(ii) Justifier qu'il existe une constante $K > 0$ (indépendante de δ) tel que pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \int_0^\delta t^{1/x} (f(t) - f(1))\, dt \right| \leq K \frac{x}{x+1}\, \delta^{1+1/x}.$$

(iii) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \frac{x+1}{x} \int_0^1 t^{1/x} f(t)\, dt - f(1) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + K\delta^{1+1/x},$$

puis que $\frac{x+1}{x} F(x) - f(1)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+.

(iv) Montrer que $F(x) = xf(1) + o(x)$, $x \to 0^+$.

d) On suppose dans cette question que f satisfait en plus l'hypothèse que l'intégrale

$$\int_0^1 |\ln(t) f(t)|\, dt$$

converge.

(i) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer pour $x>0$, $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

(ii) En utilisant la question c)(iv), montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner sa dérivée à droite en 0.

Exercice 2. a) Justifier que pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}.$$

On précisera bien les hypothèses du théorème employé et on dessinera le graphe de la fonction étudiée sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

c) Justifier que pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

On précisera bien les hypothèses du théorème employé et on dessinera le graphe de la fonction étudiée sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

d) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$