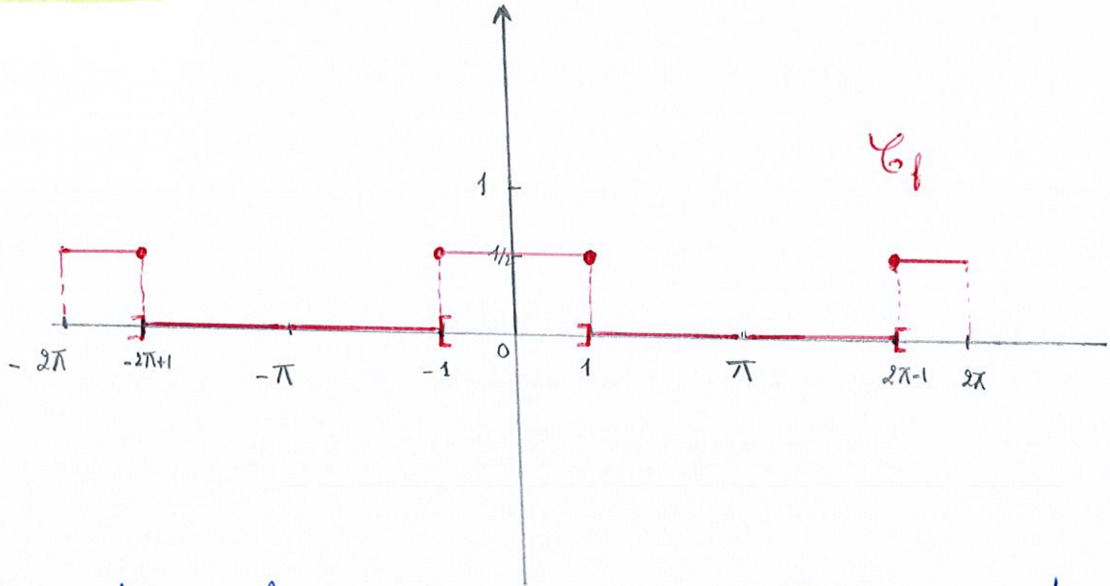
M53 2022-2023

Rattrapage

Exercice (1)

(a)



(b) La fonction f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc on peut calculer ses coefficients de Fourier.

Comme f est paire (par hypothèse), on a $b_n(f) = 0$, $\forall n \geq 1$.

De plus,
$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt \quad \text{(par parité de } f\text{)}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{1} f(t)dt \quad \text{(car } f \text{ est nulle sur }]1,\pi]\text{)}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2\pi}$$

Pour $n \geq 1$, on a :
$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$
$$= \frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{2}\pi}\int_0^1 \cos(nt)dt$$

D'où

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin(n)}{n}$$

En résumé : $b_n(f) = 0,\ n \geq 1$ et $a_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , n = 0 \\ \frac{1}{\pi}\frac{\sin(n)}{n} & , n \geq 1. \end{cases}$

c La fonction f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \longmapsto \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$,
où $f(x^+)$ (respectivement $f(x^-)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) de f au point x.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

et pour $x = -1$, $f(x^+) = \frac{1}{2}$, $f(x^-) = 0$,

pour $x = 1$, $f(x^+) = 0$, $f(x^-) = \frac{1}{2}$

Ainsi, pour $x = \pm 1$, on a $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{\frac{1}{2}+0}{2} = \frac{1}{4}$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$.

Finalement,

$$(*) \qquad Sf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi,-1[\,\cup\,]1,\pi] \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-1,1[. \end{cases}$$

d En appliquant $(*)$ (question c) à $x = 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) = \frac{1}{2}$$

D'où $$\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{1}{2}$$

soit $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \right) = \frac{\cancel{\pi} (\pi - 1)}{2 \cancel{\pi}}$$

Ainsi $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}$$

D'autre part, comme f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de Parseval qui dit que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$$

Or $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad \text{(par parité)}$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4\pi}$$

D'où
$$\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{1}{4\pi}$$

soit $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = 2\pi^2 \left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi^2} \right) = \frac{\cancel{2}\cancel{\pi^2} (\pi - 1)}{\cancel{2} 4 \cancel{\pi^2}}$$
$$= \frac{\pi - 1}{2}.$$

Ainsi
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}.$$

Exercice 2

a) Pour $x > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc localement intégrable.

De plus, on a :

$$\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = \frac{1 - t - (1 - xt) + o(t)}{t}, \quad t \to 0$$

$$= \frac{(x-1)t + o(t)}{t}, \quad t \to 0$$

$$= x - 1 + o(1) \xrightarrow[t \to 0]{} x - 1$$

Ainsi, on peut prolonger la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ par continuité en 0 et donc l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,dt \text{ converge.}$$

De plus, remarquons que :

$$t^2\left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right) = t\left(e^{-t} - e^{-xt}\right) = \frac{1}{\frac{e^t}{t}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{e^{xt}}{xt}}$$

Comme $\dfrac{e^u}{u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} +\infty$ (croissance comparée), on en déduit que

$$t^2\left(\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

et donc

$$\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to +\infty.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,dt$ converge.

Finalement, pour tout $x>0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt$ converge et donc G est bien définie sur $]0;+\infty[$.

b) (i) Pour tout $u\geq 0$, on a $e^{-u}\leq 1$ et donc $1-e^{-u}\geq 0$.

De plus, posons $\varphi(u)=1-e^{-u}-u$, $u\geq 0$.

La fonction φ est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour $u\geq 0$, on a : $\varphi'(u)=e^{-u}-1\leq 0$

Donc φ est décroissante sur $[0;+\infty[$, ce qui donne que

$$\forall u\geq 0,\quad \varphi(u)\leq \varphi(0)=1-e^{-0}-0=1-1=0.$$

D'où $\forall u\geq 0$, $1-e^{-u}-u\leq 0$, ce qui donne $1-e^{-u}\leq u$.

(ii) Soient $0<x\leq 1$, $t\geq 0$.

On a :
$$e^{-xt}-e^{-t}=e^{-xt}\left(1-e^{-(1-x)t}\right)$$

Or $0<x\leq 1$, $t\geq 0 \Rightarrow (1-x)t\geq 0$ et d'après (i), on a

$$0\leq 1-e^{-(1-x)t}\leq (1-x)t.$$

D'où
$$0\leq e^{-xt}-e^{-t}\leq (1-x)t\,e^{-xt}$$

Soient $1\leq x$, $t\geq 0$

On a :
$$e^{-t}-e^{-tx}=e^{-t}\left(1-e^{-(x-1)t}\right)$$

Or $0\leq t$, $1\leq x \Rightarrow (x-1)t\geq 0$ et d'après (i), on a :

$$0\leq 1-e^{-(x-1)t}\leq (x-1)t$$

D'où
$$0\leq e^{-t}-e^{-tx}\leq (x-1)t\,e^{-t}$$

(c) Introduisons la fonction

$$g :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,t) \longmapsto g(x,t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}.$$

La fonction g est continue sur $]0;+\infty[\times]0,+\infty[$.

<u>Continuité de G sur $]a,1]$, $0 < a < 1$.</u>

D'après (b)(ii), $\forall x \in]a,1]$, $\forall t > 0$, on a :

$$|g(x,t)| = \frac{|e^{-t} - e^{-xt}|}{t} = \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} \leq (1-x)e^{-xt}$$
$$\leq e^{-xt} \leq e^{-at}$$

De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge <u>car</u>

$t \longmapsto e^{-at}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et pour $T > 0$, on a

$$\int_0^T e^{-at}\,dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^T = \frac{1 - e^{-aT}}{a} \xrightarrow[T \to +\infty]{} \frac{1}{a}.$$

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, on en déduit que G est continue sur $]a,1]$ et on a

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} G(x) = G(1) = 0.$$

<u>Continuité de G sur $[1,b[$, $b > 1$.</u>

D'après (b)(ii), $\forall x \in [1,b[$, $\forall t > 0$, on a :

$$|g(x,t)| = \frac{|e^{-t} - e^{-xt}|}{t} = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \leq (x-1)e^{-t}$$
$$\leq (b-1)e^{-t}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (voir ci-dessus)

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, on en déduit que G est continue sur $[1, b[$ et on a :

$$\lim_{x \to 1^+} G(x) = G(1) = 0.$$

Continuité de G sur $]0; +\infty[$.

D'après ce qui précède, comme G est continue sur $]a, 1]$ et sur $[1, b[$ avec $\lim_{x \to 1^+} G(x) = G(1) = 0 = \lim_{x \to 1^-} G(x)$, on en déduit que G est continue sur $]a, b[$, $\forall\, 0 < a < 1 < b$.

Soit $x_0 \in]0; +\infty[$. Posons $a = \frac{1}{2}\min(1, x_0)$ et $b = 2\max(x_0, 1)$. Il est facile de vérifier que $0 < a < 1 < b$ et $x_0 \in]a, b[$.

D'après ce qui précède, G est continue sur $]a, b[$ donc G est continue en x_0. Comme c'est vraie pour tout $x_0 > 0$, on en déduit que G est continue sur $]0; +\infty[$.

d) $*$ La fonction g est continue sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x,t)\,dt$ converge, $\forall x > 0$.

$**$ $\forall t > 0$, $x \longmapsto g(x,t) = \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall t > 0, \forall x > 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-(-t)e^{-xt}}{t} = e^{-xt}$$

Ainsi $\frac{\partial g}{\partial x}$ existe et est continue sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.

*** Fixons $a>0$. Alors

$\forall x\in]a;+\infty[$, $\forall t>0$, on a :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt$ converge (voir question (c))

Ainsi d'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, G est de classe C^1 sur $]a;+\infty[$, et $\forall x>a$, on a

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt .$$

Ceci étant vrai pour tout $a>0$, on en déduit que G est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$, on a :

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \quad \text{(voir question (c))}.$$

(e) Comme G est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$, on a :

$$G(x) = \int_1^x G'(t)\,dt + G(1)$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + G(1)$$

$$= \left[\ln(t)\right]_1^x + G(1)$$

$$= \ln(x) + G(1).$$

Or $G(1)=0$. D'où $\forall x>0$, $G(x)=\ln(x)$.

Exercice 3

(a) Posons $f :]0;+\infty[\times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto f(x,t) = \frac{\varphi(t)}{1+t^{1/x}} = \frac{\varphi(t)}{1+e^{\frac{1}{x}\ln(t)}}$$

Comme $t \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, la fonction $(x,t) \longmapsto e^{\frac{1}{x}\ln(t)}$ est continue sur $]0;+\infty[\times [a,b]$ et $1+e^{\frac{1}{x}\ln(t)} \geq 1 > 0$.

De plus, φ étant continue sur $[a,b]$, on en déduit que la fonction f est continue sur $]0;+\infty[\times [a,b]$.

Le théorème de continuité des intégrales définies à paramètres implique alors que F est bien définie et continue sur $]0;+\infty[$.

(b)(i) On a :

$$\frac{b^{1-\frac{1}{x}}-1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(b)}-1}{1-\frac{1}{x}}.$$

Or $1-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et comme $b>1$, $\ln(b)>0$

d'où $e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(b)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

Ainsi $\dfrac{b^{1-\frac{1}{x}}-1}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \text{"}\dfrac{-1}{-\infty}\text{"} = 0$

(b)(ii) La fonction φ est continue sur $[a,b]$ donc en particulier bornée. Posons $M = \|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| < +\infty$.

On a $\displaystyle\int_1^b \frac{|\varphi(t)|}{1+t^{1/x}}\,dt \leq \|\varphi\|_\infty \int_1^b \frac{1}{1+t^{1/x}}\,dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_1^b \frac{1}{t^{1/x}}\,dt$

D'où

$$\int_1^b \frac{|\varphi(t)|}{1+t^{1/x}}\,dt \leq \|\varphi\|_\infty \int_1^b t^{-1/x}\,dt$$

$$= \|\varphi\|_\infty \left[\frac{t^{1-\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} \right]_1^b$$

$$= \|\varphi\|_\infty \frac{b^{1-\frac{1}{x}}-1}{1-\frac{1}{x}}.$$

b (iii) On a d'après (iii)

$$0 \leq \int_1^b \frac{|\varphi(t)|}{1+t^{1/x}}\,dt \leq \|\varphi\|_\infty \frac{b^{1-\frac{1}{x}}-1}{1-\frac{1}{x}}$$

Or d'après (i) $\frac{b^{1-\frac{1}{x}}-1}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et d'après le théorème des gendarmes, on peut en déduire que

$$\int_1^b \frac{|\varphi(t)|}{1+t^{1/x}}\,dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.$$

b (iv) On a :

$$\int_a^1 |\varphi(t)| \left| 1 - \frac{1}{1+t^{1/x}} \right| dt \leq \|\varphi\|_\infty \int_a^1 \left| 1 - \frac{1}{1+t^{1/x}} \right| dt$$

$$= \|\varphi\|_\infty \int_a^1 \frac{t^{1/x}}{1+t^{1/x}}\,dt$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty \int_a^1 t^{1/x}\,dt$$

$$= \|\varphi\|_\infty \left[\frac{t^{1/x+1}}{1/x+1} \right]_a^1$$

D'où

$$0 \leq \int_a^1 |\varphi(t)| \left|1 - \frac{1}{1+t^{1/x}}\right| dt \leq \|\varphi\|_\infty \frac{1 - a^{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}+1}.$$

Or $\frac{1}{x} + 1 \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et comme $a < 1$, $\ln(a) < 0$

d'où $$a^{\frac{1}{x}+1} = e^{\left(\frac{1}{x}+1\right)\ln(a)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$$

Ainsi $$\frac{1 - a^{\frac{1}{x}+1}}{\frac{1}{x}+1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$ et le théorème

des gendarmes une nouvelle fois implique que

$$\int_a^1 |\varphi(t)| \left|1 - \frac{1}{1+t^{1/x}}\right| dt \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.$$

b) v) On a :

$$\left|F(x) - \int_a^1 \varphi(t)dt\right| = \left|\int_a^b \frac{\varphi(t)}{1+t^{1/x}} dt - \int_a^1 \varphi(t)dt\right|$$

$$= \left|\int_a^1 \varphi(t)\left(\frac{1}{1+t^{1/x}} - 1\right) dt + \int_1^b \frac{\varphi(t)}{1+t^{1/x}} dt\right|$$

$$\leq \int_a^1 |\varphi(t)| \left|1 - \frac{1}{1+t^{1/x}}\right| dt + \int_1^b \frac{|\varphi(t)|}{1+t^{1/x}} dt.$$

On déduit alors de (iii) et (iv) que

$$F(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \int_a^1 \varphi(t)dt$$

Ainsi si on pose $F(0) = \int_a^1 \varphi(t)dt$, on obtient que F se prolonge par continuité sur $[0; +\infty[$.

c) On a :

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{1+t^n}dt = F\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(0)$$ par

continuité de F sur $[0, +\infty[$.

Ainsi $$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt.$$

d) (i) On a $$I_n = \int_a^1 t^{n-1}\varphi_n(t)dt = \int_a^1 \frac{t^{n-1}}{1+t^n}\varphi(t)dt$$

La fonction φ et $t \longmapsto v(t) = \ln(1+t^n)$ sont de classe C^1 sur $[a;1]$ et on a $v'(t) = \frac{n\,t^{n-1}}{1+t^n}$.

Ainsi par une intégration par partie, on a :

$$I_n = \frac{1}{n}\int_a^1 v'(t)\varphi(t)dt = \frac{1}{n}\Big[v(t)\varphi(t)\Big]_a^1 - \frac{1}{n}\int_a^1 v(t)\varphi'(t)dt$$

Soit

$$I_n = \frac{1}{n}\Big(v(1)\varphi(1) - v(a)\varphi(a)\Big) - \frac{1}{n}\int_a^1 \varphi'(t)\ln(1+t^n)dt$$

$$= \frac{1}{n}\Big(\varphi(1)\ln(2) - \varphi(a)\ln(1+a^n)\Big) - \frac{1}{n}\int_a^1 \varphi'(t)\ln(1+t^n)dt$$

d) ii) Comme $0 < a < 1$, on a $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et donc $\ln(1+a^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1) = 0$.

Ainsi $\dfrac{\ln(1+a^n)}{n}\varphi(a) = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

d) iii) Comme φ' est continue sur $[a,b]$, elle est bornée.

Ainsi
$$\left|\int_a^1 \varphi'(t)\ln(1+t^n)dt\right| \leq \int_a^1 |\varphi'(t)|\,|\ln(1+t^n)|dt$$
$$\leq \|\varphi'\|_\infty \int_a^1 \ln(1+t^n)dt$$

$\left(\text{car } \ln(1+t^n) \geq 0\right)$.

De plus, rappelons que $\forall u > 0$, $\ln(1+u) \leq u$

D'où
$$\left|\int_a^1 \varphi'(t)\ln(1+t^n)dt\right| \leq \|\varphi'\|_\infty \int_a^1 t^n dt$$
$$= \|\varphi'\|_\infty \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^1$$
$$= \|\varphi'\|_\infty \frac{1-a^{n+1}}{n+1}$$
$$\leq \|\varphi'\|_\infty \frac{1}{n+1} \leq \|\varphi'\|_\infty \frac{1}{n}.$$

Donc
$$\left|\int_a^1 \varphi'(t)\ln(1+t^n)dt\right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

d) iv) D'après (iii), on a :
$$\left|\frac{1}{n}\int_a^1 \varphi'(t)\ln(1+t^n)dt\right| = \frac{1}{n}O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où avec (i) et (ii), on a

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n}\varphi(1) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi comme $\varphi(1) \neq 0$, on en déduit que

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n}\varphi(1)\left(1 + o(1)\right),$$

soit $$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(2)\varphi(1)}{n}.$$