Université de Lille — Faculté des Sciences et Technologies — Département de Mathématiques

LICENCE DE MATHÉMATIQUES- SEMESTRE 5 2022-2023

M53 - INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

# RATTRAPAGE

21 février 2023

Durée : 3 heures

**Exercice 1.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction **paire,** $2\pi$**-périodique** définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in ]1,\pi]. \end{cases}$$

a) Dessiner le graphe de $f$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de $f$.

c) Etudier la convergence simple de la série de Fourier de $f$ sur $[-\pi,\pi]$ et préciser, suivant les valeurs de $x \in [-\pi,\pi]$, la valeur de $Sf(x)$ (qui désigne la somme de la série de Fourier de $f$ au point $x$).

d) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi-1}{2}.$$

**Exercice 2.** Pour $x > 0$, on pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt.$$

a) Montrer que $G$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b) (i) Etablir que pour tout $u \geq 0$, on a

$$0 \leq 1 - e^{-u} \leq u.$$

(ii) En déduire que

$$(0 < x \leq 1,\ 0 \leq t) \implies 0 \leq e^{-xt} - e^{-t} \leq (1-x)te^{-xt},$$

et

$$(1 \leq x,\ 0 \leq t) \implies 0 \leq e^{-t} - e^{-xt} \leq (x-1)te^{-t}.$$

c) Montrer que $G$ est continue sur $]0,+\infty[$.
*Indication : on pourra regarder la continuité séparément sur $]a,1]$ puis sur $[1,b[$, $0 < a < 1 < b$, en précisant la valeur de $G(1)$.*

d) Montrer que $G$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $G'(x)$ pour $x > 0$.

e) En déduire la valeur de $G$.

T.S.V.P.

**Exercice 3.** Soient $0 < a < 1 < b$ et $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ telle que $\varphi(1) \neq 0$. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{1 + t^{\frac{1}{x}}}\,dt.$$

a) Montrer que $F$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Le but de cette question est de montrer qu'on peut prolonger $F$ par continuité sur $[0, +\infty[$ en posant
$$F(0) = \int_a^1 \varphi(t)\,dt.$$

(i) Déterminer la limite de $\dfrac{b^{1-\frac{1}{x}} - 1}{1 - \frac{1}{x}}$ quand $x \to 0^+$.

(ii) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $0 < x < 1$, on a

$$\int_1^b \frac{|\varphi(t)|}{1 + t^{\frac{1}{x}}}\,dt \leq M \frac{b^{1-\frac{1}{x}} - 1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

(iii) En déduire la limite de $\int_1^b \frac{|\varphi(t)|}{1+t^{\frac{1}{x}}}\,dt$ quand $x \to 0^+$.

(iv) Montrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \int_a^1 |\varphi(t)| \left| \frac{1}{1 + t^{\frac{1}{x}}} - 1 \right| dt = 0.$$

(v) Conclure.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [a, b]$, on pose $\varphi_n(t) = \dfrac{\varphi(t)}{1 + t^n}$. En utilisant ce qui précède, calculer la limite de $\int_a^b \varphi_n(t)\,dt$ quand $n \to +\infty$.

d) On s'intéresse dans cette question à $I_n = \int_a^1 t^{n-1}\varphi_n(t)\,dt$, $n \geq 1$.

($i$) Montrer que

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n}\varphi(1) - \frac{\ln(1 + a^n)}{n}\varphi(a) - \frac{1}{n}\int_a^1 \varphi'(t)\ln(1 + t^n)\,dt.$$

($ii$) Justifier que $\frac{\ln(1+a^n)}{n}\varphi(a) = o(\frac{1}{n})$ quand $n \to +\infty$.

($iii$) Montrer que $\left|\int_a^1 \ln(1 + t^n)\varphi'(t)\,dt\right| = O(\frac{1}{n})$ quand $n \to +\infty$.

($iv$) En déduire que

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n}\varphi(1) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{lorsque } n \to +\infty,$$

puis en déduire un équivalent de $I_n$.