Chapitre 1
–
RAPPELS : INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES ET CONTINUITÉ UNIFORME

1 Continuité uniforme

Dans cette section, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1. *Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est* uniformément continue *sur E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que quels que soient $x, x' \in E$, $\|x - x'\| < \eta$ implique $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Proposition 1.2. *La continuité uniforme implique la continuité.*

Remarque 1.3. *La réciproque est fausse. Par exemple $f : x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (voir TD).*

Théorème 1.4 (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.*

Preuve : Soit E une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et, soit $f : E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue sur E.
Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur E, autrement qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe x et y dans E tels que $\|x - y\| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0$.
On en déduit qu'il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de E telles que pour tout n, $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$.
Comme E est fermé et borné, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $(x_{n_k})_k$ convergente. On note $\alpha \in E$ la limite de $(x_{n_k})_k$. Puisque

$$\begin{aligned} \|y_{n_k} - \alpha\| &\leqslant \|y_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - \alpha\| \\ &\leqslant \frac{1}{n_k} + \|x_{n_k} - \alpha\|, \end{aligned}$$

la suite $(y_{n_k})_k$ converge également vers α.
La continuité de f implique :

$$\begin{aligned} \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) &= \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) - f(\alpha) + f(\alpha) - f(y_{n_k}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$. □

2 Intégrales généralisées (impropres)

2.1 Intégrale de Riemann

Soient a et b deux réels, $a < b$.

On dit que $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ et des réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, on ait $\phi(x) = c_i$. On définit alors

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(a_i - a_{i-1}).$$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On pose

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \ / \ \phi \text{ fonction en escalier et } \phi(x) \leqslant f(x),\ \forall x \in [a,b] \right\},$$
$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)dx \ / \ \phi \text{ fonction en escalier et } f(x) \leqslant \phi(x),\ \forall x \in [a,b] \right\}.$$

On dira alors que f est *Riemann-intégrable* ou *intégrable au sens de Riemann* si $I^+(f) = I^-(f)$. On appelle ce nombre *intégrale de Riemann de f* et on le note

$$\int_a^b f(x)dx = I^+(f) = I^-(f).$$

Exemple 2.1.1. *Les fonctions en escaliers, les fonctions continues, continues par morceaux ($f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n$ telle que pour tout i, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et les limites $\lim_{\substack{x \to a_i \\ a_i < x}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \to a_{i+1} \\ a_{i+1} > x}} f(x)$ existent), les fonctions monotones sont Riemann-intégrables.*

2.2 Intégrabilité locale d'une fonction

On se donne I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (donc non nécessairement borné ou fermé...)

Définition 2.2.1. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* localement intégrable *sur I si sa restriction à tout intervalle fermé et borné $[c,d]$ inclus dans I est Riemann-intégrable.*

Exemple 2.2.2. *Toute fonction continue sur I est localement intégrable sur I.*
Toute fonction continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I.
Toute fonction monotone sur I est localement intégrable sur I.

2.3 Intégrales généralisées, intégrales impropres

Définition 2.3.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$) et f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$.*
On dit que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est convergente *si $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt$ (resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^b f(t)dt$) existe et appartient à $\mathbb{R}$. On appelle cette limite* l'intégrale généralisée (ou impropre) *de f sur $[a,b[$ et on la note $\int_a^b f(t)dt$. Si la limite n'existe pas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente en b (resp. en a).*

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f une fonction localement intégrable sur $]a,b[$.
On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente s'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. Sinon on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Remarque 2.3.2. *Il faut noter que si f est localement intégrable sur $[a,b[$, la nature de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de a, autrement dit pour tout $a' \in [a,b[$, $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_{a'}^b f(t)dt$ sont de même nature. En effet, pour tout $a < a' < x$ on a $\int_a^x f(t)dt = \int_{a'}^a f(t)dt + \int_{a'}^x f(t)dt$.*
Ainsi $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)dt = \int_{a'}^a f(t)dt + \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_{a'}^x f(t)dt$ et donc $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_{a'}^b f(t)dt$ sont de même nature.

D'autre part, dans la deuxième partie de la définition ci-dessus $\int_a^b f(t)dt$ *ne dépend pas du point* c. *En effet, si* c' *est un point de l'intervalle* $]a,b[$, *distinct de* c, *par exemple,* $c' < c$, *alors pour tout* $x \in]a,c'[$, *la relation de Chasles donne*

$$\int_x^{c'} f(t)dt = \int_x^c f(t)dt - \int_{c'}^c f(t)dt$$

d'où

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \int_x^{c'} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt - \int_{c'}^c f(t)dt.$$

Autrement dit, l'intégrale généralisée $\int_a^{c'} f(t)dt$ *converge vers* $\int_a^c f(t)dt - \int_{c'}^c f(t)dt$. *De même,* $\int_{c'}^b f(t)dt$ *converge vers* $\int_c^b f(t)dt + \int_{c'}^c f(t)dt$ *et*

$$\int_a^{c'} f(t)dt + \int_{c'}^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

L'étude d'une intégrale impropre en les deux bornes se ramenant à l'étude de deux intégrales impropres en une seule borne, nous étudierons essentiellement uniquement le cas d'intégrales impropres en exactement une borne.

Exemple 2.3.3. *Étude de* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *pour* $a > 0$ *et* $\alpha > 0$ *: Soit* $x > a$. *Lorsque* $\alpha \neq 1$, *on a :*

$$\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{a^{\alpha-1}}.$$

Si $\alpha > 1$, $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>a}} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$ *et donc l'intégrale* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *converge et vaut* $-\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{a^{\alpha-1}}$.
Si $\alpha < 1$, $\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>a}} \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$ *et donc l'intégrale* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *diverge.*
Enfin, si $\alpha = 1$,

$$\int_a^x \frac{1}{t}dt = \ln(x) - \ln(a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ *diverge.*

Exemple 2.3.4. *Étude de* $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}dt$ *pour* $b > 0$ *et* $\alpha > 0$ *: Soit* $0 < x < b$. *On a si* $\alpha \neq 1$ *:*

$$\int_x^b \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}.$$

Si $\alpha > 1$, $\lim_{\substack{x\to0\\ x>0}} -\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$ *et donc l'intégrale* $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}dt$ *diverge.*
Si $\alpha < 1$, $\lim_{\substack{x\to0\\ x>0}} -\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$ *et donc l'intégrale* $\int_0^b \frac{1}{t^\alpha}dt$ *converge et vaut* $\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{b^{\alpha-1}}$.
Enfin, si $\alpha = 1$,

$$\int_x^b \frac{1}{t}dt = \ln(b) - \ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$$

et donc $\int_0^b \frac{1}{t}dt$ *diverge.*

Exemple 2.3.5. *Montrons que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ *converge : Soit* $x > 0$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Soit $x < 0$

$$\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = -\arctan x \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ *converge et vaut* π.

Remarque 2.3.6. *Contrairement à ce que ces exemples semblent indiquer, le fait que* $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ *converge n'implique pas que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$*, même si* f *est positive. Considérons par exemple la fonction* f *définie sur* $[0, +\infty[$ *de la manière suivante :* $f(x) = 1$ *s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* x *appartienne à* $[n, n + \frac{1}{2^n}]$*,* $f(x) = 0$ *sinon. Soit* $x > 0$ *et* $n_x \in \mathbb{N}$ *tel que* $n_x - 1 < x \leqslant n_x$*. Alors*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &\leqslant \int_0^{n_x} f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n_x-1} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n_x}}}{1 - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &\geqslant \int_0^{n_x-1} f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n_x-2} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{n_x-1}}}{1 - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Lorsque x *tend vers* $+\infty$*,* n_x *tend vers* $+\infty$ *et* $\frac{1-\frac{1}{2^{n_x}}}{1-\frac{1}{2}}$ *et* $\frac{1-\frac{1}{2^{n_x-1}}}{1-\frac{1}{2}}$ *tendent vers 2. Par conséquent,* $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 2$ *et donc l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *converge alors que* f *ne tend pas vers 0.*

2.4 Critères de convergence

Proposition 2.4.1. *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *finis,* $a < b$*, et* f *localement Riemann intégrable sur* $[a, b[$ *et bornée sur* $[a, b[$*. Alors l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*

Corollaire 2.4.2. *Si* f *est continue sur* $[a, b[$*,* b *fini, et si* $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ *existe, alors l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*

Notation 2.4.3. *Soient* $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *et deux fonctions* f *et* g *définies au voisingae de* a*. On dit que* f *est dominée par* g *et on note* $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}\left(g(x)\right)$ *s'il existe* $M \geqslant 0$ *telle que pour tout* x *au voisinage de* a*,* $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$*.*

Théorème 2.4.4. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et* f *et* g *deux fonctions localement intégrables sur* $[a, b[$*. On suppose que*

(i) Il existe $c \in [a, b[$ *tel que pour tout* $x \in [c, b[$*,* $f(x) \geqslant 0$*,*

(ii) $f(x) \underset{\substack{x\to b\\ x<b}}{=} \mathcal{O}(g(x))$*.*

On a

(a) si $\int_a^b g(t)dt$ *converge alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*

(b) si $\int_a^b f(t)dt$ *diverge alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*

Exemple 2.4.5. *Étudions la convergence de l'intégrale* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{2-1/t}}dt$*. Remarquons tout d'abord que ce n'est pas une intégrale du type* $\int^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *car l'exposant n'est pas constant. On a* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{t^{2-1/t}}}{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}} = 0$ *donc* $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(g(x))$*.*

Comme $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ *converge et comme* $\frac{1}{t^{1-\frac{1}{t}}} \geqslant 0$ *quel que soit* $t \geqslant 2$*, on en déduit que* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{2-1/t}}dt$ *converge.*

Définition 2.4.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle non vide I, d'extrémité a et b, $a < b$, et soit $x_0 \in I$ ou $x_0 = a$ ou $x_0 = b$.*
On dit que f est équivalente à g en x_0 s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que

(i) $f = g \cdot (1 + \varepsilon)$,

(ii) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \varepsilon(x) = 0$.

Dans ce cas, on note $f \sim_{x \to x_0} g$.
Lorsque que g est non nulle sur un voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0, cela est équivalent à dire que $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Théorème 2.4.7. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$. On suppose que*

(i) Il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, $f(x) \geqslant 0$,

(ii) $f(x) \underset{\substack{x \to b \\ x < b}}{\sim} g(x)$.

Alors $\int_a^b g(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple 2.4.8. *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^{1+1/t}}$. La fonction f n'est pas une fonction puissance puisque l'exposant n'est pas constant. Cependant, pour tout $t \geqslant 1$, $\frac{1}{t} > 0$ et $f(t) \sim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}$ car*

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t}} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{t}}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{\ln t}{t}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, on en déduit que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+1/t}} dt$ diverge également.

Définition 2.4.9. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$* converge absolument *si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.*
Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge mais ne converge pas absolument, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente.

Théorème 2.4.10. *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, et f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument alors elle converge.*

Exemple 2.4.11. *Étudions $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $|\sin t| \leqslant 1$ et donc $\left| \frac{\sin t}{1+t^2} \right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$. Puisque l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge, le critère de comparaison des intégrales implique que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$ converge absolument et donc converge.*

Exemple 2.4.12. *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est convergente. En effet, $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc localement intégrable et pour totu $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{t^2}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge absoluement et donc converge.*

Exemple 2.4.13. *$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.*
En effet, $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, $\lim_{x \to 0} {}_{x>0} \frac{\sin t}{t} = 1$ donc $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

D'autre part pour tout $X \geqslant 1$, en effectuant une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt &= \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= \cos 1 + \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt.\end{aligned}$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge, $\lim_{x\to+\infty} \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$.
D'autre part, puisque pour tout $X \geqslant 1$, $\left|\frac{\cos X}{X}\right| \leqslant \frac{1}{X}$, on a $\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$.
Ainsi $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
Cependant $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt &\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{t} dt \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{t} dt \\ &\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{2} \frac{1}{(k+1)\pi} \\ &\geqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$ et donc que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absoluement.

Définition 2.4.14 (Critère de Cauchy)**.** *Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, éventuellement $b = +\infty$, et f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ satisfait le critère de Cauchy pour les intégrales généralisées si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in [a, b[$ tel que pour tout $x, x' \in]x_\varepsilon, b[$, on ait*

$$\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

Théorème 2.4.15. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement elle satisfait le critère de Cauchy pour les intégrales généralisées.*