Chapitre 2

–

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE :
CAS DES INTÉGRALES DÉFINIES

Dans ce chapitre, a et b désigneront deux réels tels que $a < b$ et X désignera une partie de de $\mathbb{R}^d$.
On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] \times X & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & f(t,x) \end{array} \right.$$

et on suppose (à minima) que quel que soit $x \in X$, l'application $t \mapsto f(t,x)$ est Riemann intégrable.
On peut ainsi définir une nouvelle fonction F en posant pour tout $x \in X$:

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt.$$

Dans ce chapitre nous allons donner des conditions suffisante sur f pour que F soit continue, dérivable, de classe C^1...

1 Continuité

Lemme 1.1. *Soient X une partie de $\mathbb{R}^d$, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$, $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$, $g \in C([a,b] \times X)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in X$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, tout $x' \in X$, si $\|x - x'\| < \delta$ alors $|g(x',t) - g(x,t)| < \varepsilon$.*

Preuve : On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $x_* \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $t \in [a,b]$ et $x' \in X$ vérifiant $\|x' - x_*\| < \delta$ et $|g(t,x') - g(t,x_*)| \geqslant \varepsilon$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in [a,b]$, $x_n \in X$ tel que $\|x_n - x_*\| < \frac{1}{n}$ et $|g(t_n,x_n) - g(t_n,x_*)| \geqslant \varepsilon$.
En particulier, la suite $(x_n)_n$, comme toute sous-suite extraite de $(x_n)_n$, converge vers x_*.
D'autre part, $(t_n)_n$ est une suite d'éléments de $[a,b]$, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite extraite $(t_{n_k})_k$ qui converge dans $[a,b]$. On note t_* la limite de $(t_{n_k})_k$.
Puisque g est continue, $\lim_{k\to+\infty} g(t_{n_k}, x_{n_k}) = g(t_*, x_*)$ et $\lim_{k\to+\infty} g(t_{n_k}, x_*) = g(t_*, x_*)$ et donc nous avons :

$$0 < \varepsilon \leqslant \lim_{k\to+\infty} |g(t_{n_k}, x_{n_k}) - g(t_{n_k}, x_*)| = 0,$$

ce qui est absurde! □

Théorème 1.2 (de continuité des intégrales à paramètres définies)**.** *Soient X une partie de $\mathbb{R}^d$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b] \times X$. Alors la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ est continue sur X.*

Preuve : On se donne une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$. On montre que pour tout $x_0 \in X$, $\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $[a,b] \times X$, d'après le lemme 1.1, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, tout $x \in X$, $\|x - x_0\| < \delta$ implique $|f(t,x) - f(t,x_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Pour tout $x \in X$ tel que $\|x - x_0\| < \delta$, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^b f(t,x)dt - \int_a^b f(t,x_0)dt \right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t,x) - f(t,x_0)|dt \\
&< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ pour tout $x_0 \in X$ donc F est continue sur X. □

Exemple 1.3. *Soit F la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^\pi \sin(x+t)e^{xt^2}dt$. On veut calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x)$. L'application $f : (t,x) \mapsto \sin(x+t)e^{xt^2}$ est continue sur $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x) = F(0)$ d'où*

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x) &= \int_0^\pi \sin t dt \\
&= [-\cos t]_0^\pi \\
&= 2.
\end{aligned}$$

2 Dérivabilité

Nous rappelons le théorème des accroissements finis dont nous aurons besoin pour prouver le théorème de dérivation :

Théorème 2.1 (des accroissements finis)**.** *Soient a et b deux réels, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Théorème 2.2 (de dérivation des intégrales à paramètres définies)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f une fonction continue sur $[a,b] \times I$ telle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $[a,b] \times I$.*
Alors la fonction $F : X \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$.

Preuve : Soit $x_0 \in I$. Nous commençons par montrer que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt$. Il s'agit donc de montrer que $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt$ autrement dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - x_0| < \eta$ implique

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt \right| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in I$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt \right| &= \left| \int_a^b \frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} dt - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)dt \right| \\
&\leqslant \int_a^b \left| \frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0) \right| dt.
\end{aligned}$$

D'après le théorème des accroissements, pour tout t, x, x_0, il existe $\theta = \theta(t, x, x_0)$ tel que $|\theta - x_0| \leqslant |x - x_0|$ et

$$\frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \theta).$$

D'autre part, comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[a, b] \times I$, d'après le lemme 1.1, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [a, b]$ et tout $x' \in I$, $|x' - x_0| < \delta$ implique $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x') - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Si $|x - x_0| < \delta$, nous avons $|\theta - x_0| < \delta$, ce qui implique

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(t,x) - f(t,x_0)}{x - x_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\right| &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, \theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{b - a}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)dt\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} dt = \varepsilon.$$

Nous avons donc montré que $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)dt$. Donc F est dérivable en tout $x_0 \in I$ et $F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)dt$.
La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant continue sur $[a, b] \times I$, le théorème de continuité implique que F' est continue et donc que F est de classe C^1 sur I. □

3 Application : Théorème de Fubini

Théorème 3.1. *Soit $I = [\alpha, \beta]$, $J = [a, b]$ deux intervalles fermés, bornés. Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

(i) la fonction F définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

est Riemann-intégrable sur I ,

(ii) la fonction g définie pour $t \in J$ par

$$G(t) = \int_\alpha^\beta f(x, t)dx$$

est Riemann-intégrable sur J

(iii) et on a

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_a^b G(t)dt,$$

autrement dit

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x, t)dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x, t)dx\right) dt,$$

on peut donc échanger l'ordre d'intégration.

Preuve : Comme f est continue, le théorème de continuité sous le signe intégrale implique que F est continue sur I et donc Riemann intégrable sur I. De même G est continue et donc Riemann intégrable sur J.

Pour montrer (iii), on introduit la fonction h définie pour tout $(x,t) \in I \times J$ par

$$h(x,t) = \int_\alpha^x f(y,t)dy$$

et la fonction H définie pour tout $x \in I$ par

$$H(x) = \int_a^b h(x,t)dt.$$

Pour t fixé, $h(\cdot,t)$ est donc la primitive de $f(\cdot,t)$ qui s'annule en α. Pourvu que l'on sache justfier les calculs suivants, nous aurons montré le théorème :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt, \text{ si } H \text{ est dérivable et si } H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt, \\ &= \int_a^b f(x,t)dt, \text{ si } \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = f(x,t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)dt \right) dx &= \int_\alpha^\beta H'(x)dx \\ &= H(\beta) - H(\alpha) \\ &= H(\beta) \text{ pourvu que } H(\alpha) = 0 \\ &= \int_a^b h(\beta,t)dt \\ &= \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(y,t)dy \right) dt. \end{aligned}$$

On justifie maintenant ces calculs :

- La fonction f étant continue, elle est Riemann intégrable et donc h est bien définie.
- On montre que la fonction h est continue sur $I \times J$, cela montrera qu'elle est Riemann intégrable et donc que H est bien définie elle aussi. Soit $(x_0,t_0) \in I \times J$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x,t) \in I \times J$, on a :

$$\begin{aligned} h(x,t) - h(x_0,t_0) &= \int_\alpha^x f(y,t)dy - \int_\alpha^{x_0} f(y,t_0)dy \\ &= \int_\alpha^x f(y,t)dy - \int_\alpha^x f(y,t_0)dy + \int_\alpha^x f(y,t_0)dy - \int_\alpha^{x_0} f(y,t_0)dy \\ &= \int_\alpha^x (f(y,t) - f(y,t_0))dy + \int_{x_0}^x f(y,t_0)dy. \end{aligned}$$

  Comme f est continue sur $I \times J$ qui est compact, f est bornée sur $I \times J$. Il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $(x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leqslant M$. On en déduit que

$$\left| \int_{x_0}^x f(y,t_0)dy \right| \leqslant (x - x_0)M.$$

  Ainsi, si $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2M}$, on a

$$\left| \int_{x_0}^x f(y,t_0)dy \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Comme f est continue sur le compact $I \times J$, f est uniformément continue sur $I \times J$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(y,t),(y',t') \in I \times J$, si $|y - y'| + |t - t'| < \eta$, alors $|f(y,t) - f(y',t')| <$

$\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$ On en déduit que si $|t-t_0|<\eta$, alors

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^x (f(y,t)-f(y,t_0))dy\right| &\leqslant \int_\alpha^x \frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}dy\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2M}, \eta\right)$ dès que $|x-x_0|<\delta$ et $|t-t_0|<\delta$, on a $|h(x,t)-h(x_0,t_0)|<\varepsilon$, autrement dit, $\lim_{(x,t)\to(x_0,t_0)} h(x,t) = h(x_0,t_0)$.

— h est dérivable par rapport à x sur I et pour tout $(x,t)\in I\times J$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$. En particulier, $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue sur $I\times J$.

— Par définition de h, pour tout $t\in J$, l'application $x\mapsto \int_\alpha^x f(y,t)dy$ est la primitive de $x\mapsto f(x,t)$ qui s'annule en α. Par conséquent h est dérivable par rapport à x et $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = f(x,t)$ donc $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue.

— Comme h est continue, dérivable par rapport à x et comme $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, H est de classe C^1 et $H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt = \int_a^b f(x,t)dt$.

— Enfin, $H(\alpha) = \int_a^b \left(\int_\alpha^\alpha f(y,t)dy\right)dt = 0$.

□

Exemple 3.2. *Calculer* $I = \int_1^2 \left(\int_0^2 ye^{xy}dy\right)dx$.
La fonction $(x,y)\mapsto ye^{xy}$ *est continue sur* $[1,2]\times[0,2]$*. Le théorème de Fubini implique alors que*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2\left(\int_1^2 ye^{xy}dx\right)dy\\ &= \int_0^2 \left[e^{xy}\right]_{x=1}^{x=2}dy\\ &= \int_0^2 \left(e^{2y}-e^y\right)dy\\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2y}-e^y\right]_0^2\\ &= \frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4 Intégrale à paramètres dont les bornes dépendent d'un paramètre

Théorème 4.1. *Soient* I *et* J *deux intervalles fermés et bornés de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I\times J\to\mathbb{R}$, $a, b : I\to J$ *trois fonctions continues.*
Alors la fonction F *définie sur* I *par*

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$$

est de continue sur I*.*

Preuve : On considère $\phi : I\times J\times J\to\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)dt.$$

Comme f est continue, f est Riemann intégrable sur $[u, v]$ (ou $[v, u]$) et donc ϕ est bien définie. On montre que ϕ est continue. Soit $(x_0, u_0, v_0), (x, u, v) \in I \times J \times J$ et soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\phi(x, u, v) - \phi(x_0, u_0, v_0) &= \int_u^v f(x, t)dt - \int_{u_0}^{v_0} f(x_0, t)dt \\ &= \int_u^{u_0} f(x, t)dt + \int_{v_0}^{v} f(x, t)dt + \int_{u_0}^{v_0} (f(x, t) - f(x_0, t)dt.\end{aligned}$$

Comme f est continue sur le compact $I \times J$, elle est bornée et uniformément continue sur $I \times J$. Soit $M \geqslant 0$ tel que pour tout $(x, t) \in I \times J$, on ait $|f(x, t)| \leqslant M$. Alors on a $\left|\int_u^{u_0} f(x, t)dt\right| \leqslant M|u - u_0|$.
Ainsi, si $|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{3M}$, on a $\left|\int_u^{u_0} f(x, t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
De même, si $|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{3M}$, on a $\left|\int_v^{v_0} f(x, t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
Enfin, si $u_0 = v_0$ alors $\int_{u_0}^{v_0}(f(x, t) - f(x_0, t)dt = 0 < \frac{\varepsilon}{3}$. Sinon, par l'uniforme continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(y, t), (y', t') \in I \times J$, si $|y - y'| < \eta$ et $|t - t'| < \eta$, alors $|f(y, t) - f(y', t')| < \frac{\varepsilon}{3|u_0 - v_0|}$. Ainsi si $|t - t_0| < \eta$, $\left|\int_{u_0}^{v_0}(f(x, t) - f(x_0, t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
On en déduit finalement que si $|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{3M}$, $|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{3M}$ et $|t - t_0| < \eta$, on a $|\phi(x, u, v) - \phi(x_0, u_0, v_0)| < \varepsilon$ ce qui montre que $\lim_{(x,u,v)\to(x_0,u_0,v_0)} \phi(x, u, v) = \phi(x_0, u_0, v_0)$, i.e. ϕ est continue en (x_0, u_0, v_0) et donc sur $I \times J \times J$. Par suite $F : x \mapsto \phi(x, a(x), b(x))$ est la composée de fonctions continues et est donc continue. □

Théorème 4.2. *Soient I et J deux intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{R}$, $a, b : I \to J$ trois fonctions telles que :*

(i) a et b sont de classe C^1,

(ii) f est continue ;

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times J$.

Alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)dt$$

est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, on a

$$F'(x) = b'(x)f(x, b(x)) - a'(x)f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

Preuve : On considère de nouveau $\phi : I \times J \times J \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x, u, v) = \int_u^v f(x, t)dt.$$

Pour u et x fixés, ϕ est dérivable par rapport à v puisque c'est la primitive de $t \mapsto f(x, t)$ qui s'annule en u et on a $\frac{\partial \phi}{\partial v}(x, u, v) = f(x, v)$. De même $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ existe et $\frac{\partial \phi}{\partial u}(x, u, v) = -f(x, u)$.
Lorsque u et v sont fixés, comme f est continue sur $I \times [u, v]$, dérivable par rapport à x et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [u, v]$, le théorème de dérivation sous le signe intégrale implique que ϕ est dérivable par rapport à x et que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, u, v) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

On en déduit que $F : x \mapsto \phi(x, a(x), b(x))$ est dérivable et que

$$\begin{aligned}F'(x) &= b'(x)\frac{\partial \phi}{\partial u}(x, a(x), b(x)) + a'(x)\frac{\partial \phi}{\partial v}(x, a(x), b(x)) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, a(x), b(x)) \\ &= b'(x)f(x, b(x)) - a'(x)f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue, d'après le théorème 4.1, $(x, u, v) \mapsto \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$ est continue et donc finalement F' est continue. □