Chapitre 3

–

INTÉGRALES IMPROPRES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

1 Continuité

On rappelle le théorème suivant, vu en L2, et que nous allons utiliser pour montrer le théorème de continuité sous le signe intégrale.

Théorème 1.1 (Continuité des suite de fonctions). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I. On suppose que*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue,

(ii) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction f.

Alors f est continue sur I.

Théorème 1.2 (de continuité sous le signe intégrale). *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, X une partie de $\mathbb{R}^d$, $f : [a, b[\times X \to \mathbb{R}$. On suppose que :*

(i) f est continue sur $[a, b[\times X$,

(ii) **(hypothèse de domination)** *il existe une fonction $\phi : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ telle que*

(a) pour tout t de $[a, b[$ et tout x de X, on a $|f(t, x)| \leqslant \phi(t)$,

(b) l'intégrale généralisée $\int_a^b \phi(t)dt$ converge.

Alors $F : x \mapsto \int_a^b f(t, x)dt$ est bien définie et elle est continue sur X.

Preuve : On commence par montrer que pour tout $x \in X$ fixé, $F(x)$ est bien définie, autrement dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t, x)dt$ converge. Nous avons pour tout $t \in [a, b[$

$$|f(t, x)| \leqslant \phi(t)$$

et $\int_a^b \phi(t)dt$ converge donc $\int_a^b f(t, x)dt$ converge absolument et F est bien définie.
Nous montrons maintenant que la fonction F est continue en montrant que F est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues.
Soit $(b_n)_n$ une suite de réels de l'intervalle $[a, b[$ qui converge vers b. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit F_n la fonction définie pour $x \in X$ par $F_n(x) = \int_a^{b_n} f(t, x)dt$.
Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est continue sur $[a, b_n] \times X$ donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale du chapitre 2, F_n est continue.
Montrons que $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur X. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

on a

$$
\begin{aligned}
|F(x)-F_n(x)| &= \left|\int_a^b f(t,x)dt - \int_a^{b_n} f(t,x)dt\right| \\
&= \left|\int_{b_n}^b f(t,x)dt\right| \\
&\leqslant \int_{b_n}^b |f(t,x)|\,dt \\
&\leqslant \int_{b_n}^b \phi(t)dt.
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\sup_X |F-F_n| \leqslant \int_{b_n}^b \phi(t)dt$. Or, $\int_a^b \phi(t)dt$ converge donc :

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_{b_n}^b \phi(t)dt &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \phi(t)dt - \int_a^{b_n} \phi(t)dt \\
&= \int_a^b \phi(t)dt - \lim_{n\to+\infty}\int_a^{b_n} \phi(t)dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

d'où $\lim_{n\to+\infty}\sup_X |F-F_n| = 0$: $(F_n)_n$ converge uniformément vers F et donc F est continue comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. □

Exemple 1.3. *: Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ par $f(t,x)=\frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ et F définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(x)=\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$.*
Notons $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\phi(t)=\frac{1}{1+t^2}$. Alors ϕ est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\phi(t)dt$ converge et pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, $|f(t,x)|\leqslant\phi(t)$. De plus f est continue donc d'après le théorème de continuité, F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 1.4. *Dans le théorème précédent, l'hypothèse de domination est* cruciale *et il est* primordial *que ϕ ne dépende pas de x. Considérons pour $x\geqslant 0$:*

$$F(x)=\int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt.$$

Si $x=0$, $F(0)=0$ et si $x>0$, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt$ converge donc F est bien définie sur $[0,+\infty[$.
La fonction $f:(t,x)\mapsto xe^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Cependant, il n'existe pas $\phi:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $(t,x)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ on ait à la fois $0\leqslant|f(t,x)|\leqslant\phi(t)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty}\phi(t)dt$ convergente. En effet, l'inégalité $0\leqslant|f(t,x)|\leqslant\phi(t)$ implique en particulier pour tout $t>0$: $0\leqslant f(t,\frac{1}{t})=\frac{1}{t}e^{-1}\leqslant\frac{1}{t}$ et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ est une intégrale de Riemann divergente.
On constate aussi que F n'est pas continue en 0 puisque $F(0)=0$ mais $F(x)=1$ pour tout $x>0$. On peut cependant montrer que F est continue en appliquant le théorème de continuité sur $]0,+\infty[$: Soit $b>a>0$. Alors pour tout $t\in[0,+\infty[$ et tout $x\in[a,b]$, f est continue sur $[0,+\infty|\times[a,b]$ et $0\leqslant|f(t,x)|\leqslant ae^{-bt}$ et $\int_0^{+\infty} be^{-at}dt$ converge car $a>0$. Ainsi F est continue sur $[a,b]$, quel que soit $0<a<b$ donc sur $]0,+\infty[$.

2 Dérivabilité

On rappelle le théorème suivant vu en L2 que nous allons utiliser pour montrer le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale.

Théorème 2.1 (Dérivation des suite de fonctions)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I. On suppose que*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable,

(ii) la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction g

(iii) il existe x_0 dans I tel que la suite (numérique) $(f_n(x_0))_n$ converge.

Alors il existe une fonction f définie sur I telle que

(a) f est dérivable sur I et $f' = g$,

(b) la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I.

Théorème 2.2 (de dérivation sous le signe intégrable)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : [a, b[\times I \to \mathbb{R}$. On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t, x)dt$ converge pour tout x de I, et que les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) f est continue sur $[a, b[\times I$,

(ii) la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en tout point de $[a, b[\times I$

(iii) **(hypothèse de domination)** *il existe une fonction $\phi : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ telle que*

(a) pour tout $t \in [a, b[$ et tout $x \in I$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leqslant \phi(t)$,

(b) l'intégrale de ϕ sur $[a, b[$ est convergente.

Alors $F : x \mapsto \int_a^b f(t, x)dt$ est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$.

Preuve : Comme $\int_a^b f(t, x)dt$ converge pour tout x de I, la fonction F est bien définie. Pour montrer qu'elle est ce classe C^1, on raisonne de la même façon que pour le théorème de continuité. Soit $(b_n)_n$ une suite d'éléments de $[a, b[$ qui converge vers b.
Soit $(b_n)_n$ une suite d'éléments de $[a, b[$ qui converge vers b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit F_n la fonction définie pour $x \in X$ par $F_n(x) = \int_a^{b_n} f(t, x)dt$.
Comme $\int_a^b f(t, x)dt$ converge pour tout x de I, on a $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ quel que soit $x \in I$, autrement dit, $(F_n)_n$ converge simplement sur I vers F.
D'autre part, d'après le théorème de dérivabilité du chapitre précédent, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, F_n est de classe C^1 et $F'_n(x) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$.
Enfin, l'hypothèse de domination implique que quel que soit $x \in I$, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$ converge absolument donc converge. La fonction G définie pour $x \in I$ par $G(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$ est donc bien définie. On montre que la suite de fonctions $(F'_n)_n$ converge uniformément sur I vers la fonction G.
Soit $x \in I$. On a

$$\begin{aligned}
|G(x) - F'_n(x)| &= \left|\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt - \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt\right| \\
&= \left|\int_{b_n}^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt\right| \\
&\leqslant \int_{b_n}^b \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| dt \\
&\leqslant \int_{b_n}^b \phi(t)dt
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sup_I |G - F'_n| \leqslant \int_{b_n}^b \phi(t)dt$. Comme l'intégrale $\int_a^b \phi(t)dt$ converge, il s'en suit que $\lim_{n\to+\infty} \int_{b_n}^b \phi(t)dt = 0$ et donc que $\lim_{n\to+\infty} \sup_I |G - F'_n| = 0$, autrement dit que $(F'_n)_n$ converge uniformément sur I vers G.
Le théorème de dérivabilité des suites de fonctions implique alors que F est de classe C^1 et que $F' = G$.
□

Exemple 2.3. *On considère encore $f(t,x) = \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt$. Nous nous intéressons maintenant à la dérivabilité de F. La fonction f est continue et dérivable par rapport à x et pour tout $x, t \in \mathbb{R}^+$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2}.$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Alors que f était dominée sur $\mathbb{R}^+$ par $\phi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$, si nous procédons de même ici, puisque $\sup_{x\geqslant 0} e^{-tx} = 1$, nous dominons $\frac{\partial f}{\partial x}$ par $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ mais $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt$ ne converge pas puisque $\frac{t}{1+t^2} \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge.
On ne peut donc pas se séparer du terme e^{-xt} dans la domination. Comme nous voulons avoir une fonction indépendante de x pour dominer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et qu'autoriser x à se rapprocher de 0 donne une mauvaise majoration, nous allons nous donner un $a > 0$ et nous restreindre à l'intervalle $[a, +\infty[$.
Alors $\sup_{x\geqslant a} e^{-tx} = e^{-at}$ et puisque $\left|\frac{t}{1+t^2}\right| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 0$, nous avons pour tout $x \in [a, +\infty[$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant e^{-at}.$$

On note que la fonction $\psi : t \mapsto e^{-at}$ est positive et $\int_0^{+\infty} \psi(t)dt$ converge.
D'après le théorème de dérivation, F est donc dérivable sur $[a, +\infty[$ et $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}dt$.
Comme $a > 0$ est arbitraire, on en déduit que F est dérivable sur $\cup_{a>0}[a, +\infty[=]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}dt$.
Étudions la dérivabilité de F en 0. Le théorème de dérivation ne s'appliquera pas et nous devons étudier la limite $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x}$. Pour tout $x > 0$, puisque $e^{-xt} - 1 \leqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)-F(0)}{x} &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-1}{x(1+t^2)}dt. \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-1}{xt}\frac{t}{(1+t^2)}dt \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{e^{-xt}-1}{xt}\frac{t}{(1+t^2)}dt
\end{aligned}$$

Nous étudions les variations de $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(u) = \frac{e^{-u}-1}{u}$ si $u \neq 0$, $g(0) = -1$. Alors g est continue sur $[0,1]$ puisque $e^{-u} - 1 \sim_{u\to+\infty} -u$ et donc $\lim_{u\to 0} g(u) = -1$. De plus, la fonction est dérivable sur $]0,1]$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\begin{aligned}
g'(u) &= \frac{-ue^{-u} - (e^{-u}-1)}{u^2} \\
&= \frac{e^{-u}(e^u - u - 1)}{u^2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Donc g est croissante et pour tout $u \in]0,1]$, on a $g(u) \leqslant e^{-1} - 1$.
On en déduit que pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0, \frac{1}{x}]$,

$$\frac{e^{-xt}-1}{xt}\frac{t}{(1+t^2)} \leqslant (e^{-1}-1)\frac{t}{(1+t^2)}.$$

Nous avons donc pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)-F(0)}{x} &\leqslant (e^{-1}-1)\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t}{(1+t^2)}dt \\
&= \frac{e^{-1}-1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x\to 0} -\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x}$ *n'existe pas dans* $\mathbb{R}$ *et* F *n'est pas dérivable en* 0.

Théorème 2.4 (de Fubini)**.** *Soit* $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et soit* $f : [a, b[\times[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose qu'il existe une fonction* $\phi : [a, b[\to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $(t, x) \in [a, b[\times[\alpha, \beta]$*,* $|f(t, x)| \leqslant \phi(t)$ *et telle que* $\int_a^b \phi(t)dt$ *converge.*
Alors

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(t, x)dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(t, x)dx \right) dt.$$

Preuve : D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale de ce chapitre, $G : x \mapsto \int_a^b f(t, x)dt$ est continue donc G est intégrable donc $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(t, x)dt \right) dx$ est bien définie.

D'après le théorème de continuité du chapitre précédent, $F : t \mapsto \int_\alpha^\beta f(t, x)dt$ est continue sur $[a, b[$ donc localement intégrable. De plus pour tout $t \in [a, b[$, on a

$$\begin{aligned} |F(t)| &\leqslant \int_\alpha^\beta |f(t, x)|dt \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta \phi(t)dt \\ &= (\beta - \alpha)\phi(t). \end{aligned}$$

Comme $\int_a^b \phi(t)dt$ converge, on en déduit que $\int_a^b F(t)dt$ converge absolument donc converge et donc $\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(t, x)dx \right) dt$ est bien définie.
On considère une suite $(b_n)_n$ d'élements de $[a, b[$ qui converge vers b. D'après le théorème de Fubini du chapitre précédent :

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(t, x)dt \right) dx = \int_a^{b_n} \left(\int_\alpha^\beta f(t, x)dx \right) dt.$$

Nous allons faire tendre n vers l'infini dans cette égalité pour démontrer le théorème.
D'une part

$$\int_a^{b_n} \left(\int_\alpha^\beta f(t, x)dx \right) dt = \int_a^{b_n} F(t)dt$$

et comme $\int_a^b F(t)dt$ converge, $\lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} F(t)dt = \int_a^b F(t)dt$ d'où

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} \left(\int_\alpha^\beta f(t, x)dx \right) dt &= \int_a^b F(t)dt \\ &= \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(t, x)dx \right) dt. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction g_n pour $x \in [\alpha, \beta]$ par $G_n(x) = \int_a^{b_n} f(t, d)dt$. Comme f est continue, le théorème de continuité sous le signe intégrale implique que G_n est continue sur $[\alpha, \beta]$. Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, on a

$$\begin{aligned} |G(x) - G_n(x)| &= \left| \int_a^b f(t, x)dt - \int_a^{b_n} f(t, x)dt \right| \\ &\leqslant \int_{b_n}^b |f(t, x)|dt \\ &\leqslant \int_{b_n}^b \phi(t)dt. \end{aligned}$$

Comme $\int_a^b \phi(t)dt$ converge, $\lim_{n\to+\infty} \int_{b_n}^b \phi(t)dt = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[\alpha,\beta]} |G - G_n| = 0$, i.e. $(G_n)_n$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers G. Il s'en suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta G_n(x)dx = \int_\alpha^\beta G(x)dx$$

autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{b_n} f(t,x)dt\right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(t,x)dt\right) dx$$

ce qui montre que

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(t,x)dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(t,x)dx\right) dt.$$

□

3 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un objet mathématique très utilisée en théorie du signal et le "pendant continue" des séries de Fourier pour les fonctions périodiques.

Définition 3.1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de f est la fonction F définie pour $s \in \mathbb{R}$ par*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}dt.$$

On la note aussi $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$.

Remarque 3.2. *Sans hypothèse supplémentaire sur f, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}dt$ ne converge pas et $\hat{f}$ n'est en général pas définie sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 3.3 (Existence de la transformée de Fourier)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ converge. Alors*

(a) $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}dt$ converge absolument car $|f(t)e^{-ist}| = |f(t)|$ donc $\hat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Puisque l'application $(t, s) \mapsto f(t)e^{ist}$ est continue et puisque pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ $|f(t)e^{is}| \leqslant |f(t)|$ et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, le théorème de continuité sous le signe intégrale implique que $\hat{f}$ est continue. □

Théorème 3.4 (Dérivabilité de la transformée de Fourier)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge. Alors $\hat{f}$ est bien définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a*

$$\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-ist}dt.$$

Preuve : On montre que $\hat{f}$ est bien définie. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$|f(t)e^{-ist}| \leqslant |tf(t)| + |f(t)|\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A : $\mathbb{1}_A(t) = 1$ si et seulement si t appartient à A.

Comme f est continue, $\int_{-1}^{1} |f(t)|dt$ converge (c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné) et par hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(|tf(t)| + |f(t)|\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\right) dt$ converge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ist}dt$ converge absolument. Ainsi $\hat{f}$ est bien définie.
La fonction $g : (t, s) \mapsto f(t)e^{-ist}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, dérivable par rapport à s. Pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial s}(t, s) = -itf(t)e^{-ist}$ donc $\frac{\partial g}{\partial s}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a, pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\frac{\partial g}{\partial s}(t, s)\right| \leqslant |tf(t)|$ avec l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$ convergente. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale implique que $\hat{f}$ est dérivable et on a quel que soit $s \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}'(s) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-ist}dt.$$

□

Théorème 3.5 (Riemann-Lebesgue)**.** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *telle que* $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ *converge.*
Alors $\lim_{|s|\to+\infty} \hat{f}(s) = 0$.

Preuve : Il s'agit de montrer que $\lim_{s\to+\infty} \hat{f}(s) = \lim_{s\to-\infty} \hat{f}(s) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, il existe $b > 0$ grand tel que $\int_{b}^{+\infty} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$ et il existe $a < 0$ tel que $\int_{-\infty}^{a} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$. On en déduit que pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(s)\right| &\leqslant \left|\int_{-\infty}^{a} f(t))e^{-ist}dt\right| + \left|\int_{a}^{b} f(t)e^{-ist}dt\right| + \left|\int_{b}^{+\infty} f(t))e^{-ist}\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{a} |f(t)|dt + \left|\int_{a}^{b} f(t)e^{-ist}dt\right| + \int_{b}^{+\infty} |f(t)|dt \\ &\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \int_{a}^{b} |f(t)|dt.\end{aligned}$$

Nous allons majorer l'intégrale $\int_{a}^{b} f(t)e^{-ist}dt$ en faisant une intégration par parties. Soit $s \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(t)e^{-ist}dt &= \left[f(t)\frac{e^{-ist}}{is}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_{a}^{b} f'(t)\frac{e^{-ist}}{is}dt \\ &= -\frac{1}{is}\left(f(b)e^{-isb} - f(a)e^{-isa}\right) + \frac{1}{is}\int_{a}^{b} f'(t)\frac{e^{-ist}}{is}dt.\end{aligned}$$

Nous avons $\lim_{s\to+\infty} f(b)\frac{e^{-isb}}{is} = \lim_{s\to+\infty} f(a)\frac{e^{-isa}}{is} = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}\left|\frac{i}{s}\int_{a}^{b} f'(t)e^{-ist}dt\right| &\leqslant \frac{1}{s}\int_{a}^{b} \left|f'(t)e^{-ist}\right| dt \\ &\leqslant \frac{1}{s}(b-a)\sup_{[a,b]} |f'|.\end{aligned}$$

Comme f' est continue, $\sup_{[a,b]} |f'|$ est fini et donc $\lim_{s\to+\infty} \frac{1}{s}(b-a)\sup_{[a,b]} |f'| = 0$. On en déduit que $\lim_{s\to+\infty} \frac{i}{s}\int_{a}^{b} f'(t)\frac{e^{-ist}}{is}dt$ puis que $\lim_{s\to+\infty} \int_{a}^{b} f(t)e^{-ist}dt = 0$.
On en déduit qu'il existe $s_0 > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec $s > s_0$, on a $\left|\frac{i}{s}\int_{a}^{b} f'(t)\frac{e^{-ist}}{is}dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, quel que soit $s \in \mathbb{R}$, $s > s_0$ implique $|\hat{f}(s)| < \varepsilon$, autrement dit $\lim_{s\to+\infty} |\hat{f}(s)| = 0$. On démontre de même non que $\lim_{s\to-\infty} |\hat{f}(s)| = 0$. □

Théorème 3.6. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|dt$ converge.*
Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{(f')}(s) = is\hat{f}(s)$.

Preuve : D'après le théorème d'existence de la transformée de Fourier, $\hat{f}$ et $\widehat{f'}$ existent et sont définies sur $\mathbb{R}$. Comme dans la preuve du théorème précédent, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $s \in \mathbb{R}^*$, une intégration par partie nous donne :

$$\int_a^b f(t)e^{-ist}dt = -\frac{1}{is}\left(f(b)e^{-ibs} - f(a)e^{-isa}\right) + \frac{1}{is}\int_a^b f'(t)e^{-ist}.$$

On va faire tendre a et b vers l'infini.
Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, $\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)e^{-ist}dt = \hat{f}(s)$.
Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|dt$ converge, $\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f'(t)e^{-ist}dt = \hat{f}(s)$.
Pour prouver le théorème, il suffit alors de montrer que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. On montre tout d'abord que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe puis on montre que nécessairement cette limite est nulle.
On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ et puisque $\int_0^{+\infty} f'(t)dt$ converge absolument, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= f(0) + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(t)dt \\ &= f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt\end{aligned}$$

On note $l = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt$. Si $|l| > 0$ alors il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $|f(x)| \geqslant \frac{|l|}{2}$ mais alors pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^x |f(t)|dt &\geqslant \int_{x_0}^x |f(t)|dt \\ &\geqslant \int_{x_0}^x \frac{|l|}{2}dt \\ &= (x - x_0)\frac{|l|}{2}\end{aligned}$$

et donc $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x |f(t)|dt = +\infty$ ce qui contredit l'hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ converge. On en déduit que $l = 0$, autrement dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On montre de même que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ce qui prouve le théorème. $\square$