Chapitre 4

–

SÉRIES DE FOURIER

1 Séries trigonométriques

1.1 Premières définitions et premiers résultats

Définition 1.1.1. *On appelle* polynôme trigonométrique *une somme finie de fonction de la forme* $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ *où les* a_n *et les* b_n *sont deux nombres réels ou de complexes. Un polynôme trigonométrique* $p(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *sera dit d'ordre* N *si l'un des coefficients* a_N *ou* b_N *est non nul.*
On appelle série trigonométrique *toute série de fonction dont le terme général est de la forme* $u_n = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$*,* $x \in \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, où* $(a_n)_n$ *et* $(b_n)_n$ *désignent deux suites de réels ou de complexes.*

On peut évidemment supposer que $b_0 = 0$ ce que nous ferons par la suite. D'autre part, en posant $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $n > 0$, $c_0 = a_0$, et $c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})$ pour $n < 0$, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)(\cos(nx) + i\sin(nx)) + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)(\cos(nx) - i\sin(nx)) \\ &= a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \end{aligned}$$

et donc le polynôme trigonométrique

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

peut aussi s'écrire sous la forme d'une somme indexée sur $\mathbb{Z}$:

$$p(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

et p sera d'ordre N si l'un des coefficients c_{-N} ou c_N est non nul.
La série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

quant à elle peut aussi s'écrire sous la forme d'une série indexée sur $\mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Nous conviendrons de dire que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n$ converge si et seulement si la suite de fonctions $\left(\sum_{n=-N}^{N} v_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge. On convient analoguement concernant la convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions indexée sur $\mathbb{Z}$, de sorte que la convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ est équivalente à la convergence simple, uniforme, normale de la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

En appliquant les résultats classiques sur les séries de fonctions vues en L2, on a immédiatement ce premier résultat de convergence :

Théorème 1.1.2. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|$ convergent, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme est une fonction continue.*

On rappelle le critère d'Abel de convergence vu en L2 :

Théorème 1.1.3. *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n$ une série de fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que*

(i) pour tout $x \in D$, la suite $(\alpha_n(x))_n$ est à valeurs réelles et est décroissante,

(ii) la suite de fonction $(\alpha_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur D,

(iii) Il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_D |\sum_{k=0}^{n} \beta_k| \leqslant M$.

Alors la série de fonction $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n$ converge uniformément sur D.

Preuve. Nous allons montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n$ vérifie le critère de Cauchy de la convergence uniforme des suites de fonctions. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in D$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \beta_0 + \ldots + \beta_n$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)\beta_k(x) =& \sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)\left(B_k(x) - B_{k-1}(x)\right)\\
=& \sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)B_k(x) - \sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)B_{k-1}(x)\\
=& \sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)B_k(x) - \sum_{k=p-1}^{p+q-1} \alpha_{k+1}(x)B_k(x)\\
=& \alpha_{p+q}(x)B_{p+q}(x) - \alpha_p(x)B_{p-1}(x) + \sum_{k=p}^{p+q-1} (\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x))B_k(x)\end{aligned}$$

Comme $(\alpha_n(x))_n$ est décroissante, $\alpha_{k-1}(x) - \alpha_k(x) \geqslant 0$ donc :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{p+q-1} (\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x))B_k(x)\right| \leqslant& \sum_{k=p}^{p+q-1} (\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x))\,|B_k(x)|\\
\leqslant& M\sum_{k=p}^{p+q-1} (\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x))\\
=& M(\alpha_p(x) - \alpha_{p+q}(x))\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)\beta_k(x)\right| \leqslant& \alpha_{p+q}(x)M + M\alpha_p(x) + M(\alpha_p(x) - \alpha_{p+q}(x))\\
=& 2M\alpha_p(x).\end{aligned}$$

Comme $(\alpha_k)_k$ converge uniformément vers 0 sur D, il existe n_0 tel que pour tout $p \geqslant n_0$ et tout $x \in D$, $0 \leqslant \alpha_p(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$ d'où on déduit que pour tout $x \in D$ et tout $p \geqslant n_0$, tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)\beta_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $p \geqslant n_0$ et tout $q \in \mathbb{N}$: $\sup_D \left|\sum_{k=p}^{p+q} \alpha_k(x)\beta_k(x)\right| \leqslant \varepsilon$. □

On en déduit le résultat suivant :

Théorème 1.1.4. *Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs tendant vers 0 et décroissantes.*
Alors la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

(a) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

(b) converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Sa somme est donc une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| &= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{inx}\right)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=1} e^{ikx}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right| \\ &\leqslant \frac{2}{|1-e^{ix}|}.\end{aligned}$$

Et de même

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^{ix}|}.$$

Si x est dans un intervalle de la forme $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$, $|1-e^{ix}| \geqslant \min_{t\in[2k\pi+\alpha,2(k+1)\pi-\alpha]} |1-e^{it}| > 0$ car $t \mapsto 1-e^{it}$ est une fonction continue sur le compact $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$ donc elle atteint ses bornes et comme elle ne s'annule pas sur $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$, son minimum m est strictement positif. On en déduit que $|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)| \leqslant \frac{2}{m}$ et $|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)| \leqslant \frac{2}{m}$ quel que soit $x \in [2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$. Comme $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont décroissantes et tendent vers 0, le critère d'Abel implique la converge uniforme sur tout intervalle de la forme $[2k\pi+\alpha, 2(k+1)\pi-\alpha]$ et par suite la convergence simple sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. □

1.2 Étude générale de la somme

Les propriétés suivantes sont immédiates :

a) Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge en un certain point $x \in \mathbb{R}$ alors elle converge aussi aux points $x + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et sa somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

vérifie $S(x + 2\pi) = S(x)$. Autrement dit, la somme d'une série trigonométrique est une fonction 2π-périodique.

b) La somme d'une série trigonométrique est continue sur tout intervalle sur lequel cette série converge uniformément.

c) Si la série (obtenue par dérivation terme à terme)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$$

est uniformément convergente sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge pour tout $x \in I$, alors la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est dérivable sur I et $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (nb_n \cos(nx) - na_n \sin(nx))$.

1.3 Expression des coefficients

Supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$ (et par conséquent sur $\mathbb{R}$) et posons pour $x \in \mathbb{R}$

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

En utilisant l'uniforme convergence on peut ci-dessous intervertir la série et l'intégrale ce qui donne pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} S(x)e^{-ipx}dx &= \int_0^{2\pi} \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i(n-p)x} \right) dx \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)x}dx.\end{aligned}$$

Si $k \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{ikx} &= \left[\frac{e^{ikx}}{ik} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{ik} - \frac{1}{ik} \\ &= 0\end{aligned}$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x)e^{-inx}dx.$$

On en déduit alors

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x)dx.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}a_n &= c_n + c_{-n} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \frac{e^{-inx} + e^{inx}}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \cos(nx) dx,\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{c_{-n} - c_n}{i} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \sin(nx) dx,
\end{aligned}
$$

Pour avoir une expression “uniforme” des coefficients a_n, on notera $\frac{a_0}{2}$ au lieu de a_0 le terme constant S si bien que $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

2 Coefficients de Fourier

Dans cette section, étant donnée une fonction qui admet 2π pour période, on se demande s'il existe une série trigonométrique dont elle est la somme. Cette question se pose naturellement en physique et en mécanique : l'analyse d'une vibration périodique consiste à la décomposer en une somme de vibrations élémentaires, appelées harmoniques de la vibration principale et représentées par les termes successifs d'une série trigonométrique.
On remarquera que si f est une fonction admettant T comme période, on peut se ramener aisément à une fonction 2π-périodique en posant $\tilde{f}(x) = f\left(x\frac{T}{2\pi}\right)$.
Si la fonction f est égale à la somme S d'une série trigonométrique et si la convergence de cette série est uniforme sur $\mathbb{R}$ alors les coefficients de cette série sont donnés par les formules vues dans la section précédente. Il est donc naturel d'associer à f les coefficients définies par ces formules.
Nous allons supposer que f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et continue par morceaux, c'est à dire qu'il existe une subdivision $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 2\pi$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ tel que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe une fonction ϕ_k continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ telle que $f|_{]a_k,a_{k+1}[} = \phi|_{]a_k,a_{k+1}[}$. Autrement dit, une fonction continue par morceaux admet (éventuellement) un nombre fini de discontinuité $a_0, \ldots, a_n$ mais en chacun de ces points de discontinuité, f admet une limite à droite et à gauche.
On notera $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux. Pour $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x^+) = \lim_{\substack{t\to x \\ t>x}} f(t)$ et $f(x^-) = \lim_{\substack{t\to x \\ t<x}} f(t)$.

Définition 2.1. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$. Les* coefficients de Fourier *de f sont les nombres a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ et c_n, $n \in \mathbb{Z}$ définis par les relations*

$$
a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{1}
$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
La série de Fourier *de f est, de manière équivalente, l'une des séries*

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),
$$

ou

$$
c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z},
$$

avec les relations

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n > 0, \\
c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\
c_n &= \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), \quad n < 0.
\end{aligned}
$$

Attention, il n'est nullement évident (ni sûr) que la série de Fourier de f soit convergente et même si cette série de Fourier converge, il n'est pas sûr que sa somme soit égale à f. En fait, on peut montrer qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge...
Pour traduire le fait que la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

est la série de Fourier de la fonction f, nous écrirons

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) .$$

mais le symbole "$\approx$" ne signifie rien d'autre que la relation (1) et ne préjuge en rien de la convergence de la série de Fourier.
Faisons quelques remarques concernant le calcul des coefficients de Fourier :

Proposition 2.2. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$. Avec les notation de la définition précédente, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} f(x)\sin(nx)dx, \tag{2}$$

et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} f(x)e^{-inx}dx. \tag{3}$$

Preuve. Si g appartient à $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, le changement de variable $t = x - 2\pi$ donne

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} g(x)dx &= \int_0^{\alpha} g(t+2\pi)dt \\ &= \int_0^{\alpha} g(t)dt.\end{aligned}$$

Par application de la relation de Chasles on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} g(x)dx &= \int_{\alpha}^{2\pi} g(x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} g(x)dx \\ &= \int_{\alpha}^{2\pi} g(x)dx + \int_0^{\alpha} g(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} g(x)dx.\end{aligned}$$

La proposition découle en appliquant cette égalité aux fonctions $x \mapsto f(x)\cos(nx)$, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ et $x \mapsto f(x)e^{-inx}$. □

En particulier, on a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{5}$$

On en déduit :

Proposition 2.3. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$.*
(a) Si f est une fonction paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n \text{ est réel,} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

(b) Si f est une fonction impaire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n \text{ est imaginaire pur,} \quad a_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx.$$

3 Règles de convergence

3.1 Règle de Dirichlet

Lemme 3.1.1 (de Lebesgue)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, intégrable au sens de Riemann. Alors l'intégrale*

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx$$

tends vers 0 lorsque le réel λ tend vers $\pm\infty$.

Preuve. Quitte à séparer f en sa partie réelle et sa partie imaginaire, on peut supposer que f est à valeurs réelles.
On traite d'abord le cas où f est une fonction en escalier. Il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ et des réels $c_0, \ldots, c_{n-1}$ tels que $f|_{]x_k,x_{k+1}[} \equiv c_k$, quel que soit k avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)e^{i\lambda x}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} e^{i\lambda x}dx \\
&= \frac{1}{i\lambda}\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left[e^{i\lambda x}\right]_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} \\
&= \frac{1}{i\lambda}\sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(e^{i\lambda x_{k+1}} - e^{i\lambda x_k}\right)
\end{aligned}$$

On obtient avec l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
|I(\lambda)| &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \left(|e^{i\lambda x_{k+1}}| + |e^{i\lambda x_k}|\right) \\
&\leqslant \frac{2}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1} |c_k|
\end{aligned}$$

d'où $\lim_{|\lambda|\to+\infty} I(\lambda) = 0$.
On traite maintenant le cas général où f est Riemann intégrable. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe deux

fonctions ϕ et ψ en escalier telles que $\psi \leqslant f \leqslant \phi$ et $0 \leqslant \int_a^b (\phi(t) - \psi(t))dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)e^{ix\lambda}dx - \int_a^b \psi(x)e^{ix\lambda}dx\right| &= \left|\int_a^b (f(x) - \psi(x))\, e^{ix\lambda}dx\right| \\
&\leqslant \int_a^b \left|(f(x) - \psi(x))\, e^{ix\lambda}\right| dx \\
&= \int_a^b (f(x) - \psi(x))\, dx \\
&\leqslant \int_a^b (\phi(x) - \psi(x))\, dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme d'après le premier cas $\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b \psi(x)e^{i\lambda x}dx = 0$, il existe L tel que pour tout $|\lambda| \geqslant L$, on ait

$$\left|\int_a^b \psi(x)e^{i\lambda x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $|\lambda| \geqslant L$, on a

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\right| \leqslant \left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx - \int_a^b \psi(x)e^{i\lambda x}dx\right| + \left|\int_a^b \psi(x)e^{i\lambda x}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

d'où le lemme. □

Corollaire 3.1.2. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ les coefficients de Fourier de f. Alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du lemme de Lebesgue. □

Définition 3.1.3. *Le $n^{\text{ième}}$* noyau de Dirichlet *est le polynôme trigonométrique D_n défini par*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

On a :

Lemme 3.1.4.

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\
&= 2n + 1, \quad \forall x \in 2\pi\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \\
&= e^{-inx} \frac{1 - e^{(2n+1)ix}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{-inx} - e^{(n+1)ix}}{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}} \right)} \\
&= \frac{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{-ix\left(n+\frac{1}{2}\right)} - e^{ix\left(n+\frac{1}{2}\right)} \right)}{e^{\frac{ix}{2}} \left(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}} \right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Si x appartient à $2\pi\mathbb{Z}$, $e^{inx} = 1$ pour tout n et donc $D_n(x) = 2n + 1$. $\square$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $S_n f(x)$ la somme partielle de la série de Fourier de f en x, i.e.

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Lemme 3.1.5. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+u) + f(x-u) \right) D_n(u) du.$$

Preuve. Par définition des coefficients de Fourier de f, on a

$$\begin{aligned}
S_n f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = t - x$, on a

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) D_n(-u) du$$

et comme D_n est pair :

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(u+x) D_n(u) du.$$

On utilise maintenant la 2π- périodicité de $u \mapsto f(u+x) D_n(u)$ pour écrire

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) D_n(u) du$$

En faisant le changement de variable $t=-u$, on ré-écrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(u+x)D_n(u)du &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} f(x-t)D_n(-t)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt\end{aligned}$$

d'où

$$S_nf(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+u)+f(x-u)\right)D_n(u)du.$$

□

On note pour f une fonction définie au voisinage de x :

$$\begin{aligned}f(x^+) &= \lim_{t\to x^+} f(t)\\ f(x^-) &= \lim_{t\to x^-} f(t).\end{aligned}$$

Théorème 3.1.6 (de Dirichlet)**.** *Soit $f\in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et soit $x\in\mathbb{R}$ tel que le rapport*

$$\frac{1}{u}\left(f(x+u)+f(x-u)-f(x^+)-f(x^-)\right)$$

reste borné au voisinage de $u=0$ ($u\in\mathbb{R}^*$).
Alors la série de Fourier de f converge au point x et on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.\end{aligned}$$

Preuve. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} D_n(u)du &= \int_0^{\pi} du+\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi} 2i\sin(kx)dx\\ &= \pi.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.1.5, on en déduit

$$S_nf(x)-\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+u)+f(x-u)-\left(f(x^+)+f(x^-)\right)\right)D_n(u)dt.$$

Le lemme 3.1.4 amène alors :

$$S_nf(x)-\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)-\left(f(x^+)+f(x^-)\right)\right)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt.$$

Pour $t\in]0,\pi]$, on pose $\varphi(t)=\frac{f(x+t)+f(x-t)-\left(f(x^+)+f(x^-)\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}S_nf(x)-\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt\\ &= \frac{1}{4i\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}dt+\frac{1}{4i\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}dt\end{aligned}$$

Nous allons appliquer le lemme de Lebesgue aux intégrales ci-dessus. Comme $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2}$, φ est bornée au voisinage de 0 et continue par morceaux. Cela implique que φ est Riemann intégrable sur $[0,\pi]$. Le lemme de Lebesgue nous donne alors $\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(t)e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}dt = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

et donc que la série de Fourier de f converge en x et que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

□

Les hypothèses du théorème de Dirichlet sont réalisées par une classe importante de fonctions : les fonctions dérivable par morceaux.

Définition 3.1.7. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est* dérivable par morceaux *sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle que pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$, il existe une fonction $\phi_k : [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dérivable telle que $\phi_k|_{]a_k,a_{k+1}[} = f|_{]a_k,a_{k+1}[}$.*

Corollaire 3.1.8. *Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et dérivable par morceaux sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.*
Alors la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

Preuve. Nous allons appliquer le théorème de Dirichlet. Comme f est dérivable par morceaux et 2π-périodique, f appartient à $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$. Montrons maintenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f(x+u)-f(x^+)}{u}$ existe. Soit $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n = 2\pi$ une subdivision de $[0,2\pi]$ et $\phi_k : [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dérivable telle que $\phi_k|_{]a_k,a_{k+1}[} = f|_{]a_k,a_{k+1}[}$, $k = 0,\ldots,n$. Si x appartient à $[0,2\pi] \setminus \{a_0,\ldots,a_n\}$, f est continue et dérivable en x et donc $\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f(x+u)-f(x^+)}{u}$ existe et vaut $f'(x)$.
Pour $k = 0,\ldots,n-1$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f(a_k+u) - f(a_k^+)}{u} &= \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{\phi_k(a_k+u) - \phi_k(a_k)}{u}\\ &= \phi_k'(a_k).\end{aligned}$$

De même, $\lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f(x-u)-f(x^-)}{u}$ existe. Ainsi, le rapport $\frac{1}{u}\left(f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)\right)$ reste borné au voisinage de $u = 0$ lorsque $u > 0$ et par symétrie lorsque u est au voisinage de 0. Le corollaire découle alors du théorème de Dirichlet. □

3.2 Convergence des séries de Fourier au sens de Cesàro

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réel ou complexe. La moyenne de Cesàro de $(u_n)_n$ est la suite de terme général $\frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n}$.
Selon le théorème de Cesàro, si la suite $(u_n)_n$ converge vers l, alors on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n} = l$. La réciproque est fausse : il se peut que la suite $(u_n)_n$ diverge mais que la suite des moyennes de Cesàro associée converge, par exemple si $u_{2k+1} = 0$ et $u_{2k} = 1$, $(u_n)_n$ diverge mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n} = \frac{1}{2}$. D'une certaine manière, la moyenne de Cesàro a améliorer la converge. Nous allons ici essayer d'appliquer ce même principe dans le cas des séries de Fourier.

Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier et

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\pi x}$$
$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k f(x)$$

La quantité $\sigma_n f$ s'appelle la $n^{\text{ième}}$ somme de Cesàro associée à f.

Définition 3.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le $n^{\text{ième}}$* noyau de Fejér *est le polynôme trigonométrique F_n défini par*

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

Lemme 3.2.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ &= n, \quad \forall x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Preuve. On a pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(k+\frac{1}{2}\right)x}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{ix\frac{n+1}{2}}\frac{e^{-i\frac{n}{2}x}-e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{ix\frac{n}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Si x apaprtient à $2\pi\mathbb{Z}$, pour tout k, $D_k(x) = 2k+1$ donc

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 \\ &= \frac{1}{n}\left(2\frac{(n-1)n}{2}+n\right) \\ &= n. \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 3.2.3. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) F_n(u) du.$$

Preuve. Le lemme 3.1.5 nous donne :

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) D_k(u) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(u) \right) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) F_n(u) du.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.2.4. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$.*
(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n f(x) = \frac{1}{2} \left(f(x^+) + f(x^-) \right).$$

(b) Soit K un compact de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in K$, f est continue en x. Alors $(\sigma_n f)_n$ converge uniformément sur K vers f. On dit que la série de Fourier de f converge au sens de Cesàro uniformément sur K vers f.

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi F_n(t) dt &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi D_n(t) dt \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Avec le lemme 3.2.3, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\sigma_n f(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) F_n(u) du - \left(f(x^+) + f(x^-) \right) \int_0^\pi F_n(t) dt \right) \\
&= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \left(f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right) F_n(u) du.
\end{aligned}$$

Comme d'après le lemme 3.2.2 on a $F_n \geqslant 0$, on en déduit

$$\left| \sigma_n f(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left| f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right| F_n(u) du.$$

On pose pour $\delta > 0$ petit à déterminer :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \left| f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right| F_n(u) du, \\
I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \left| f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right| F_n(u) du.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer si δ est bien choisi et n assez grand, alors $I_1 + I_2 < \varepsilon$ ce qui montrera a.
Par définition de la limite à droite, on a $\lim_{\substack{u\to 0 \\ u>0}} f(x+u) - f(x^+) = 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $u \in]0, \delta_1[$, on a $|f(x+u) - f(x^+)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $u \in]0, \delta_2[$, on a $|f(x-u) - f(x^-)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi on obtient pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et tout $u \in]0, \delta[$

$$\left| f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right| < \varepsilon$$

puis

$$\begin{aligned} I_1 &< \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta F_n(u) du \\ &< \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F_n(u) du \text{ car } \int_0^\pi F_n(u) du = \pi \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On fixe maintenant δ. Pour tout $u \in [\delta, \pi]$, on a $\left|\sin \frac{u}{2}\right| \geqslant \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$. D'autre part comme la fonction f est continue par morceaux, $M = \sup_{u \in [0,\pi]} |f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-)|$ est fini. On a ainsi :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2n\pi} \int_\delta^\pi \left| f(x+u) + f(x-u) - f(x^+) - f(x^-) \right| \frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} du \\ &\leqslant \frac{1}{2n\pi} \int_\delta^\pi M \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} du \\ &= \frac{M}{2n \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Pour tout $n \geqslant \frac{M}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\varepsilon}$, on obtient :

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 ($n_0 = \frac{M}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\varepsilon}$) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait

$$\left| \sigma_n f(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right| < \varepsilon$$

autrement dit $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$ ce qui montre (a).
On montre maintenant (b). Soit $x \in K$. Comme f est continue en K, $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$. Alors comme dans (a), on a

$$\sigma_n f(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi \left(f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)\right) F_n(u) du.$$

d'où

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| F_n(u) du.$$

On pose pour $\delta > 0$ petit à déterminer :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| F_n(u) du, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| F_n(u) du. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer, comme dans la preuve de (a), que $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ si δ est assez petit. Et comme dans la preuve de (a), c'est parce que $|f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)|$ est petit lorsque δ est petit, que I_1 est lui aussi petit lorsque δ est petit.

Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in K$ et $u \in]0, \delta[$ tels que $|f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| > \varepsilon$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in K$ et $u_n \in]0, \frac{1}{n}[$ tel que $|f(x_n+u_n) + f(x_n-u_n) - 2f(x_n)| \geqslant \varepsilon$.
Comme K est compact, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_n$ converge vers un certain $x_* \in K$. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$, $(u_n)_n$ converge vers 0. comme f est continue, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n+u_n) + f(x_n-u_n) - 2f(x_n)| = |f(x_*) + f(x_*) - 2f(x_*)| = 0$. Mais comme $|f(x_n+u_n) + f(x_n-u_n) - 2f(x_n)| \geqslant \varepsilon$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n+u_n) + f(x_n-u_n) - 2f(x_n)| \geqslant \varepsilon$, i.e. $0 \geqslant \varepsilon$: contradiction.
Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in K$ et tout $u \in]0, \delta[$, on ait $|f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| < \varepsilon$.
On en déduit alors

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\delta F_n(u)du, \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\pi F_n(u)du, \\ &= \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

où on a encore utilisé le fait que $\int_0^\pi F_n(t)dt = \pi$.
Pour majorer I_2, on remarque que puisque f est continue par morceaux et périodique, elle est bornée. En effet, soit $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n = 2\pi$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ et soit $f_k : [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que $f_k|_{]a_k,a_{k+1}[} = f|_{]a_k,a_{k+1}[}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Alors pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a $|f(x)| \leqslant \max\left(|f(a_0)|, \ldots, |f(a_n)|, \max_{[a_0,a_1]} |f_0|, \ldots, \max_{[a_{n-1},a_n]} |f_{n-1}|\right)$ et comme f est 2π-périodique, on en déduit que f est bornée sur $\mathbb{R}$. On note $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$. Alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2n\pi} \int_\delta^\pi |f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)| \frac{\sin^2\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} du \\ &\leqslant \frac{2M}{n\pi \sin^2 \delta}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $n \geqslant \frac{4M}{\pi \sin^2 \delta \varepsilon}$, on obtient $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.
Il s'en suit qu'il existe n_0 ($n_0 = \frac{4M}{\pi \sin^2 \delta \varepsilon}$) pour tout $n \geqslant n_0$, et tout $x \in K$, on a

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, on a

$$\sup_K |\sigma_n f - f| < \varepsilon$$

ce qui montre (b). □

Corollaire 3.2.5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique. Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors $f \equiv 0$.*

Preuve. Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors pour tout n, $\sigma_n(f) \equiv 0$. D'après le théorème de convergence de Fejér, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sigma_n f(x))_n$ converge vers $f(x)$ donc $f(x) = 0$. □

Corollaire 3.2.6. *L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques muni de la norme uniforme.*

Preuve. Soit f une fonction continue 2π-périodique et soit $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un polynôme trigonométrique p tel que $\sup_{[0,2\pi]} |f - p| < \varepsilon$.
Comme f est continue, d'après le théorème de convergence de Fejér, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{[0,2\pi]} |f - \sigma_n f| < \varepsilon$. Comme $\sigma_n f$ est un polynôme trigonométrique, $p = \sigma_n f$ convient. □

4 Convergence en moyenne quadratique

Sur l'espace $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on considère la forme hermitienne positive définie pour $f, g \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ par

$$\langle f, g\rangle_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

et on pose pour $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ n'est pas définie et que $\|\cdot\|_2$ n'est pas une norme mais seulement une semi-norme car $\|f\|_2$ n'implique pas $f \equiv 0$ mais seulement qu'il existe un ensemble E fini tel que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [-\pi, \pi] \setminus E$. Cet ensemble E correspond aux points de discontinuité de f.
Pour remédier à cela, il faudrait considérer le quotient de $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ par la relation d''équivalence $f \sim g$ si $\|f - g\|_2 = 0$. Sur l'espace quotient $CM_{2\pi}(\mathbb{R})/_\sim$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ est un vrai produit scalaire et $\|\cdot\|_2$ une vraie norme faisant de $CM_{2\pi}(\mathbb{R})/_\sim$ un espace pré-hibertien.

Notation 4.1. *Pour $N \geqslant 0$, nous noterons $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques d'ordre au plus N.*

Lemme 4.2. *(a) La famille $\left(e^{int}\right)_{-N\leqslant n\leqslant N}$ forme une base orthonormée de $\mathcal{P}_N$, i.e. $\left(e^{int}\right)_{-N\leqslant n\leqslant N}$ est une base "algébrique" de $\mathcal{P}_N$ et pour tout $n, l \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$ on a $\langle e^{int}, e^{ilt}\rangle_2 = 1$ si $n = l$, et $\langle e^{int}, e^{ilt}\rangle_2 = 0$ si $n \neq l$.*

(b) La famille $\{1, \cos(t), \cos(2t), \ldots, \cos(Nt), \sin(t), \ldots, \sin(Nt)\}$ forme une base orthogonale de $\mathcal{P}_N$.

Preuve. Par définition de $\mathcal{P}_N$, les familles considérées engendre $\mathcal{P}_N$. De plus pour tout l, n on a

$$\begin{aligned}\langle e^{int}, e^{ilt}\rangle_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{ilt}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-l)t}dt.\end{aligned}$$

Si $n = l$, il vient :

$$\begin{aligned}\langle e^{int}, e^{ilt}\rangle_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &= 1\end{aligned}$$

tandis que si $n \neq l$:

$$\begin{aligned}\langle e^{int}, e^{ilt}\rangle_2 &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-l)}e^{i(n-l)t}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi i(n-l)}\left((-1)^{n-l} - (-1)^{n-l}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc la famille $\left(e^{int}\right)_{-N\leqslant n\leqslant N}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{P}_N$ et par conséquent une famille libre et donc finalement une base de $\mathcal{P}_N$, ce qui montre (a).

Pour $0 \leqslant l, n \leqslant N$, $l \neq n$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \cos(nt), \cos(lt) \rangle_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(lt)dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((n-l)t) + \cos((n+l)t)\right) dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{n-l} \sin((n-l)t) + \frac{1}{n+l} \sin((n+l)t) \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} \\
&= 0 \\
\langle \sin(nt), \sin(lt) \rangle_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(lt)dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((n-l)t) - \cos((n+l)t)\right) dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{n-l} \sin((n-l)t) + \frac{1}{n+l} \sin((n+l)t) \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et pour tout $0 \leqslant l, n \leqslant N$:

$$\begin{aligned}
\langle \cos(nt), \sin(lt) \rangle_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(lt)dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin((n+l)t) + \sin((l-n)t)\right) dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{n+l} \cos((n+l)t) + \frac{1}{l-n} \cos((l-n)t) \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ce qui montre que la famille $\{1, \cos(t), \cos(2t), \ldots, \cos(Nt), \sin(t), \ldots, \sin(Nt)\}$ est une famille orthogonale et donc nécessairement libre. Par suite, c'est une base orthogonale de $\mathcal{P}_N$. □

Lorsque f appartient à $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, on note $S_N f$ la $N^{\text{ième}}$ somme partielle de Fourier de la série de Fourier de f, i.e.

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

où

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\
&= \langle f, e_k \rangle_2
\end{aligned}$$

et où e_k est la fonction $e_k : t \mapsto e^{ikt}$.
Nous avons donc

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle_2 e_k.$$

Remarquons alors que
- $S_N f$ appartient à $\mathcal{P}_N$,
- Pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $|l| \leqslant N$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle S_N f, e_l \rangle_2 &= \sum_{k=-N}^{N} \langle f, e_k \rangle_2 \langle e_k, e_l \rangle_2 \\
&= \langle f, e_l \rangle_2
\end{aligned}$$

d'où

$$\langle S_N f - f, e_l\rangle_2 = 0, \quad \forall l \in \mathbb{Z},\ |l| \leqslant N \tag{6}$$

Le polynôme $S_N f$ est la solution d'un problème de minimisation :

Théorème 4.3. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $S_N f$ la $N^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f. Alors pour tout polynôme trigonométrique $p \in \mathcal{P}_N$, on a*

$$\|f - S_N f\|_2 \leqslant \|f - p\|_2.$$

avec égalité si et seulement si $p = S_N f$.
Autrement dit, $S_N f$ est l'unique élément de $\mathcal{P}_N$ tel que $\|f - S_N f\|_2 = \min_{p\in\mathcal{P}_N} \|f - p\|_2$.

Preuve. Soit $p \in \mathcal{P}_N$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\|f - p\|_2^2 = \\
&= \|f - S_N f + S_N f - p\|_2^2 \\
&= \langle f - S_N f + S_N f - p, f - S_N f + S_N f - p\rangle_2 \\
&= \langle f - S_N f, f - S_N f\rangle_2 + \langle f - S_N f, S_N f - p\rangle_2 + \langle S_N f - p, f - S_N f\rangle_2 + \langle S_N f - p, S_N f - p\rangle_2 \\
&= \|f - S_N f\|_2^2 + \langle f - S_N f, S_N f - p\rangle_2 + \overline{\langle f - S_N f, S_N f - p\rangle_2} + \|S_N f - p\|_2^2 \\
&= \|f - S_N f\|_2^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle f - S_N f, S_N f - p\rangle_2\right) + \|S_N f - p\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Comme d'après (6), $\langle f - S_N f, e_l\rangle_2 = 0$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$ avec $|l| \leqslant N$ et comme $S_N f - p$ est un polynôme trigonométrique d'ordre au plus N, on a $\langle f - S_N f, S_N f - p\rangle_2$ d'où :

$$\begin{aligned}
\|f - p\|_2^2 &= \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f - p\|_2^2 \\
&\geqslant \|f - S_N f\|_2^2 ,
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $p = S_N f$. □

Théorème 4.4 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ et $c_n = \langle f, e_n\rangle_2$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f.*
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ converge et on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leqslant \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Preuve. Puisque $S_n f$ est une combinaison linéaire des e_l, $|l| \leqslant N$, (6) implique

$$\langle S_N f - f, S_N f\rangle_2 = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \|f - S_N f\|_2^2 \\
&= \langle f, f - S_N f\rangle_2 - \langle S_N f, f - S_N f\rangle_2 \\
&= \langle f, f - S_N f\rangle_2 \\
&= \langle f, f\rangle_2 - \langle f, S_N f\rangle_2 \\
&= \langle f, f\rangle_2 - \langle f - S_N, S_N f\rangle_2 - \langle S_N f, S_N f\rangle_2 \\
&= \|f\|_2^2 - \|S_N f\|_2^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\|S_N f\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|S_N f\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k \right\|_2^2 \\
&= \langle \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k, \sum_{l=-N}^{N} c_l e_l \rangle_2 \\
&= \sum_{k,l=-N}^{N} c_k \overline{c_l} \langle e_k, e_l \rangle_2 \\
&= \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2.
\end{aligned}$$

Finalement on en déduit que pour tout $N \geqslant 0$, on

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2. \leqslant \|f\|_2^2$$

On a donc une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par $\|f\|_2^2$. Cette série est donc convergente et sa somme est majorée par $\|f\|_2^2$. □

Nous allons voir que l'inégalité de Bessel est en fait une égalité, l'égalité de Parseval. Pour cela, nous allons d'abord montrer que toute fonction $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ peut s'approcher en "norme" $\|\cdot\|_2$ par une suite de polynômes trigonométriques.

Notation 4.5. *On note $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, 2π-périodiques.*

Lemme 4.6. *Pour toute fonction $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_2 \leqslant \varepsilon$.*

Preuve. En séparant $\mathrm{Re}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$, il suffit de considérer le cas où f est à valeurs réelles. Notons $x_0 < \ldots < x_n$ les points de discontinuité de f dans $[0, 2\pi]$.
Choisissons maintenant $\delta > 0$ suffisamment petit pour que pour tout $k, j \in \{0, \ldots, n\}$, $k \neq j$, on ait $[x_k - \delta, x_k + \delta] \cap [x_j - \delta, x_j + \delta] = \emptyset$ et si $x_0 \neq 0$, $0 < x_0 - \delta$ et si $x_n \neq 2\pi$, $x_n + \delta < 2\pi$
En dehors des intervalle $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, f est continue.
Pour chaque $k \in \{0, \ldots, x_n\}$, on note L_k la fonction affine qui passe par les points $(x_k - \delta, f(x_k - \delta))$ et $(x_k + \delta, f(x_k + \delta))$:

$$L_k(x) = \frac{x - (x_k - \delta)}{(x_k + \delta) - (x_k - \delta)} f\,(x_k + \delta) + \frac{x - (x_k + \delta)}{(x_k - \delta) - (x_k + \delta)} f\,(x_k - \delta)$$

On définit alors

$$g(t) = \begin{cases} f(x), & t \in [0, 2\pi] \setminus (\cup_{k=0}^{n}]x_k - \delta, x_k + \delta[) \\ L_k(t), & t \in]x_k - \delta, x_k + \delta[\,, 0 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

La fonction g est alors continue sur $[0, 2\pi]$ et $g(0) = g(2\pi)$ car si $x_0 \neq 0$, alors $x_n \neq 2\pi$ et $g(0) = f(0) = f(2\pi) = g(2\pi)$ et si $x_0 = 0$ alors $x_n = 2\pi$ et par périodicité de f, $L_n(t + 2\pi) = L_0(t)$ et donc $g(0) = L_0(0) = L_n(2\pi) = g(2\pi)$. On peut donc prolonger g par périodicité en une fonction $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$.
De plus on a

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t) - f(t)|^2 dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k - \delta}^{x_k + \delta} |L_k(t) - f(t)|^2 dt
\end{aligned}$$

La fonction f étant continue par morceaux et périodique, elle est bornée. On pose $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$. On a $|L_k(x)| \leqslant M$ quel que soit $x \in [x_k - \delta, x_k + \delta]$ d'où :

$$\begin{aligned} \|f-g\|_2^2 &\leqslant \frac{4M^2}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta} dt \\ &= \frac{4M^2}{\pi}(n+1)\delta. \end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant $\delta < \frac{\pi\varepsilon^2}{4M^2(n+1)}$, on a $\|f-g\|_2 < \varepsilon$. □

Corollaire 4.7. *Pour toute fonction $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p tel que $\|f-p\|_2 < \varepsilon$.*

Preuve. D'après le lemme 4.6, il existe une fonction $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.
D'après le corollaire 3.2.6, il existe p polynôme trigonométrique tel que $\sup_{\mathbb{R}} |g-p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|g-p\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)-p(t)|^2 dt \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\begin{aligned} \|f-p\|_2 &\leqslant \|f-g\|_2 + \|g-p\|_2 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.8. *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$. Alors la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique, autrement dit*

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n f - f\|_2 = 0.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 4.7, il existe un polynôme trigonométrique p tel que

$$\|f-p\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Notons N l'ordre de p. Alors d'après le théorème 4.3, pour tout $n \geqslant N$, p appartient à $\mathcal{P}_n$ et donc

$$\|S_n f - f\|_2 \leqslant \|f-p\|_2 \leqslant \varepsilon$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n f - f\|_2 = 0.$$

□

Théorème 4.9 (Identité de Parseval)**.** *Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R})$, soit S_f la série de Fourier de f :*

$$S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2\right) \end{aligned}$$

Preuve. Si la première égalité est prouvée, la deuxième provient du fait que $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ si $n < 0$ et $c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ si $n > 0$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
|c_0|^2 &= \frac{|a_0|^2}{4} \\
|c_n|^2 + |c_n|^2 &= \frac{1}{4}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2 + ia_n\overline{b_n} - ib_n\overline{a_n} + |a_n|^2 + |b_n|^2 - ia_n\overline{b_n} + ib_n\overline{a_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).
\end{aligned}$$

Pour la première identité, rappelons que

$$\|f - S_nf\|_2^2 = \|f\|_2 - \|S_nf\|_2^2$$

et d'après le corollaire 4.8 $\lim_{n\to+\infty} \|S_nf - f\|_2 = 0$.
Il s'en suit que $\lim_{n\to+\infty} \|S_nf\|_2^2 = \|f\|_2^2$.
Comme $\|S_nf\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$ et comme d'après l'inégalité de Bessel $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2$ converge, on obtient

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

□

Le prochain théorème améliore le résultat de Dirichlet lorsque la fonction est plus régulière.

Théorème 4.10. *Soit f une fonction continue, 2π-périodique et C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Alors la série de Fourier de f converge normalement donc uniformément vers f.*

Preuve. Soit $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \pi$ une partition de $[-\pi, \pi]$ telle que $f|_{]x_j, x_{j+1}[}$ est de classe C^1 et telle que f et f' admettent des limites à droite et à gauche de x_k pour tout $k = 1, \ldots, n-1$, à droite de x_0 et à gaiche de x_n. Soit $x_k < a < b < x_{k+1}$. Une intégration par parties sur $[a, b]$ donne pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)e^{-int}dt &= \left[\frac{1}{-in}f(t)e^{-int}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b -\frac{1}{in}f'(t)e^{-int}dt \\
&= -\frac{1}{in}\left(-f(b) + f(b)\right) + \frac{1}{in}\int_a^b f'(t)e^{-int}dt.
\end{aligned}$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{a\to x_k^+} f(a) = f(x_k)$ et $\lim_{b\to x_{k+1}^-} f(b) = f(x_{k+1})$.
D'autre part, f' ayant des limites à gauche de x_k et à droite de x_{k+1} $\lim_{(a,b)\to(x_k,x_{k+1})} \int_a^b f'(t)e^{-int}dt = \int_{x_k}^{xk+1} f'(t)e^{-int}dt$.
De même $\lim_{(a,b)\to(x_k,x_{k+1})} \int_a^b f(t)e^{-int}dt = \int_{x_k}^{xk+1}(t)e^{-int}dt$ On en déduit :

$$\begin{aligned}
c_n(f) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \\
=& \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)e^{-int}dt \\
=& -\frac{1}{2in\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\left((-f(x_{j+1}) + f(x_j))\right) + \frac{1}{2in\pi}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{xj+1} f'(t)e^{-int}dt \\
=& -\frac{1}{2in\pi}\left(-f(x_n) + f(x_0)\right) + \frac{1}{in}c_n(f') \\
=& \frac{1}{in}c_n(f')
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la périodicité de f.
Ainsi, pour tout $n \neq 0$

$$\begin{aligned}|c_n(f)| &= \frac{1}{n}|c_n(f')| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2\right)\end{aligned}$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et l'inégalité de Bessel appliquée à f' qui appartient à $CM_{2\pi}(\mathbb{R})$ implique que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2$ converge.
On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge et donc que la série de Fourier de f converge normalement. Le théorème de Dirichlet assure alors qu'elle converge nécessairement vers f. $\square$

Si f n'est plus que continue par morceaux, nous allons voir que le résultat précédent reste vrai sur tout compact K inclus dans $[-\pi, \pi] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ où les x_j sont les points de discontinuité de f.
Pour cela, nous aurons besoin d'une version améliorée du lemme de Lebesgue :

Lemme 4.11. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique, $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors*

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_a^b f(x+u)\omega(u)e^{i\lambda u}du\right) = 0.$$

Preuve. Comme dans la preuve du lemme de Lebesgue, on traite d'abord le cas où f est en escalier.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est en escalier, il existe une subdivision $x'_0 = a + x < x'_1 < \dots < x'_n = b + x$ telle que $f|_{]x'_k, x'_{k+1}[} = c_k$, $k = 0, \dots, n-1$. Comme f est 2π-périodique et en escalier, $\sup_{\mathbb{R}} |f|$ est fini et pour tout k, $|c_k| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f|$.
On pose $x_k = x'_k - x$. Pour tout $u \in]x_k, x_{k+1}[$, $u + x$ appartient à $]x'_k, x'_{k+1}[$ donc $f(x + u) = c_k$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x+u)\omega(u)e^{i\lambda u}du &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x+u)\omega(u)e^{iu\lambda}du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(u)e^{iu\lambda}du.\end{aligned}$$

Or

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(u)e^{i\lambda u}du = \frac{1}{i\lambda}\left[\omega(u)e^{i\lambda u}\right]_{u=x_k}^{u=x_{k+1}} - \frac{1}{i\lambda}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega'(u)e^{i\lambda u}du$$

d'où

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(u)e^{i\lambda u}du\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(\sup_{[a,b]}|\omega| + (b-a)\sup_{[a,b]}|\omega'|\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x+u)\omega(u)e^{i\lambda u}du\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \left(\frac{2}{|\lambda|}\sup_{[a,b]}|\omega| + \frac{1}{|\lambda|}(b-a)\sup_{[a,b]}|\omega'|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|} n \sup_{\mathbb{R}}|f| \left(\sup_{[a,b]}|\omega| + (b-a)\sup_{[a,b]}|\omega'|\right).\end{aligned}$$

On remarquera que $\sup_{\mathbb{R}}|f|\left(\sup_{[a,b]}|\omega| + (b-a)\sup_{[a,b]}|\omega'|\right)$ ne dépend pas de x et donc on obtient

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_a^b f(x+u)\omega(u)e^{i\lambda u}du\right) = 0.$$

Dans le cas général, on se donne $\varepsilon > 0$. Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que $a + 2K\pi \geqslant b$.
Comme f est continue par morceaux, elle est Riemann-intégrable. Il existe $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(u) - \phi(u)| du \leqslant \frac{\varepsilon}{2K \sup_{[a,b]} |\omega|}.$$

On prolonge ϕ par 2π périodicité sur $\mathbb{R}$. On en déduit alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \left(f(x+u) - \phi(x+u)\right) \omega(u) e^{i\lambda u} du \right| &\leqslant \sup_{[a,b]} |\omega| \int_{a+x}^{b+x} |f(u) - \phi(u)| du \\
&\leqslant \sup_{[a,b]} |\omega| \int_{a+x}^{a+2K\pi+x} |f(u) - \phi(u)| du \\
&= \sup_{[a,b]} |\omega| \int_0^{2\pi K} |f(u) - \phi(u)| du \\
&= K \sup_{[a,b]} |\omega| \int_0^{2\pi} |f(u) - \phi(u)| du \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_a^b \left(f(x+u) - \phi(x+u)\right) \omega(u) e^{i\lambda u} du \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, d'après le cas "fonctions en escalier" il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout λ avec $|\lambda| \geqslant \lambda_0$, on a

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \int_a^b \phi(x+u) \omega(u) e^{i\lambda u} du \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que, pour tout λ avec $|\lambda| \geqslant \lambda_0$,

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \int_a^b f(x+u) \omega(u) e^{i\lambda u} du \right| \leqslant \varepsilon.$$

□

Lemme 4.12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et C^1 par morceaux. On suppose qu'il existe un intervalle $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ tel que $f(x) = 0$ sur quel que soit $x \in [a, b]$.
Alors pour tout intervalle compact $I \subset]a, b[$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I} |S_n f(x)| = 0.$$

Preuve. Soit $I = [c, d]$ avec $a < c < d < b$ et soit $0 < \delta < \pi$ tel que $a < c - \delta$ et $d + \delta < b$. On rappelle que D_n, le noyau de Dirichlet est donné par

$$D_n(u) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \text{ pour } u \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 2n + 1 \text{ si } u = 0 \end{cases}$$

et on a alors

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) du.$$

Pour $u \in [-\delta, \delta]$ et $x \in [c, d]$, $x + u$ appartient à $[c - \delta, d + \delta] \subset]a, b[$ donc $f(x + u) = 0$. Il s'en suit

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} f(x+u) D_n(u) du + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} f(x+u) D_n(y) du.$$

On pose

$$\omega : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \omega(u)=\frac{1}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \end{array} \right. .$$

Alors ω est de classe C^1 et

$$\begin{aligned}\sup_{x\in I}|S_nf(x)| \leqslant & \frac{1}{2\pi}\sup_{x\in I}\left|\int_{-\pi}^{-\delta} f(x+u)\omega(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)du\right| \\ &+\frac{1}{2\pi}\sup_{x\in I}\left|\int_{\delta}^{\pi} f(x+u)\omega(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)du\right|\end{aligned}$$

Le lemme 4.11 implique alors que $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|S_nf(x)|=0$. □

Corollaire 4.13. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique, C^1 par morceaux et soient $x_0,\ldots,x_N$ les points de discontinuité éventuels de f dans $[-\pi,\pi]$. Alors pour tout intervalle compact $I\subset[-\pi,\pi]\setminus\{x_0,\ldots,x_N\}$, $(S_f)_n$ converge uniformément vers f sur I.*

Preuve. Soit $I=[a,b]\subset[-\pi,\pi]\setminus\{x_0,\ldots,x_N\}$ et soit $\varepsilon>0$ tel que $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]\cap\{x_0,\ldots,x_N\}=\emptyset$. On peut construire une fonction g, de clsse C^1 par morceaux, continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique tel que $f=g$ sur $[a-\varepsilon,b+\varepsilon]$.
Pour $x\in I$, on a

$$\begin{aligned}S_nf(x)-f(x)=&S_nf(x)-g(x)\\ =&S_n(f-g)(x)+S_ng(x)-g(x)\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{x\in I}|S_nf(x)-f(x)|\leqslant\sup_{x\in I}|S_n(f-g)(x)|+\sup_{x\in I}|S_ng(x)-g(x)|$$

D'après le lemme précédent, $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|S_n(f-g)(x)|=0$.
D'autre part comme g est C^1 par morceaux, continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on a d'après le théorème 4.10, $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I}|S_ng(x)-g(x)|=0$ d'où le résultat. □