DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES | Université de Lille

LICENCE 3E ANNÉE
PARCOURS MATHÉMATIQUES

2023–2024
M53, INTÉGRALES À PARAMÈTRES ET SÉRIES DE FOURIER

DEVOIR SURVEILLÉ

7 novembre 2023

[durée : 2 heures]

⚠ *Les documents et les objets électroniques sont interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1

On veut déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1. \tag{E}$$

a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'application F, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Calculer F' et F'' en fonction de f.

b) En déduire que si f est solution de (E), alors f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

c) Donner une équation différentielle (E') satisfaite par f.

d) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 2

Soient les fonctions

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2}dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+xt^2}e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{x+t^2}e^{-t^2}dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Déterminer le domaine de définition de F et montrer que F est continue sur son domaine de définition.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Calculer $F - F'$.

d) Montrer que la fonction G est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et calculer $G(0)$.

e) Montrer que $x\sqrt{x}F'(x) = G\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}F'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

f) En déduire qu'il existe une fonction ε telle que $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ et telle que

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\varepsilon(x).$$

T.S.V.P.

g) Montrer H est continue sur $[0, +\infty[$.

h) En déduire que $\lim_{x \to 0^+} F'(x) = -\infty$.

i) Dresser le tableau de variations de F et tracer l'allure du graphe de F.