$\mathcal{E}x$:

1) Si $x \geq 0$, $t \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, x]$ donc intégrable

Si $x \leq 0$, $t \mapsto \dfrac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[x, 0]$ donc intégrable

Ainsi F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x > 0$. On a
$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\ln(1-xt)}{1+t^2}\,dt$$
$$= -\int_0^{x} \frac{\ln(1+xu)}{1+u^2}\,du \qquad u = -t$$
$$= -F(x)$$

Donc F est impaire.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi : [0,a] \times [0,a] \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \dfrac{\ln(1+tx)}{1+t^2}$

$\beta : [0,a] \to [0,a]$, $x \mapsto x$

$\alpha : [0,a] \to [0,a]$, $x \mapsto 0$

Les fonctions φ, α et β donc d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres dont les bornes dépendent d'un paramètre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$. Comme a est quelconque dans $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $\forall x \geq 0$, on a :
$$F'(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+tx)}\,dt$$

2) On calcule la $2^{\text{ème}}$ intégrale en décomposant $\dfrac{t}{(1+t^2)(1+tx)}$ en éléments simples :
$$\frac{t}{(1+t^2)(1+tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1+tx}$$

En multipliant par t^2+1 et en évaluant en i, on obtient :
$$ai+b = \frac{i}{1+ix}$$
$$= \frac{i(1-ix)}{1+x^2}$$

$$= \frac{i}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}$$

d'où en identifiant parties et imaginaires $a = \frac{1}{1+x^2}$ et $b = \frac{x}{1+x^2}$

En multipliant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$ on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{c}{x} = 0$$

d'où $c = -\frac{x}{1+x^2}$.

On en déduit que :

$$\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)(1+tx)} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt + \frac{x}{1+x^2} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{1}{1+x^2} \int_0^x \frac{x}{1+xt} dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \arctan x - \frac{1}{1+x^2} \ln(1+x^2)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \arctan(x).$$

3) On calcule une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} \arctan x$.

Une intégration par partie donne :

$$\int \frac{x}{1+x^2} \arctan x \, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) . \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

d'où :

$$\int \left(\frac{x}{1+x^2} \arctan x + \frac{1}{2} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) . \arctan(x).$$

On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) . \arctan(x) + C$$

Comme $F(0) = 0$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) . \arctan(x).$$

$\mathcal{E}x$:

Soit $f : [0,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t,x) \longmapsto \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}.$$

1) Si $x<0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2} = +\infty$ et donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,dt$ diverge.

$\forall x>0$, $\forall t \geq 0$, on a :

$$|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

De plus f est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres définies montre que F est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

2) La fonction f est dérivable par rapport à x sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $\forall t \geq 0$, $\forall x \geq 0$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\frac{t^2}{t^2+1} e^{-t^2x}.$$

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Soit $a>0$, $t\geq 0$ et $x \geq a$. Alors :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq e^{-at^2}$$

et $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}\,dt$ converge. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre impropres montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$

et $\forall x \in [a,+\infty[$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{t^2}{1+t^2} e^{-t^2x}\,dt$

Comme $a>0$ est quelconque, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\forall x>0$, $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-t^2x}\,dt$. En particulier, F est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

3) On a pour $x>0$:

$$\begin{aligned} F(x)-F'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2x}\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{x}} \qquad u = \sqrt{x}\,t \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4) Soit $g : [0,+\infty[\times [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t,x) \longmapsto \frac{t^2}{1+xt^2} e^{-t^2}$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ on a

$1+xt^2 \geqslant 1$ donc $\quad |g(t,x)| \leqslant t^2 e^{-t^2}$

Or $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ converge car $t^2 e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Le théorème de continuité des intégrales impropres à paramètre montre que G est continue sur $\mathbb{R}^+$

On a $\quad G(0) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$

$\forall t_0 > 0$, on a :

$$\int_0^{t_0} t^2 e^{-t^2} dt = \left[-\frac{t}{2} e^{-t^2} \right]_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \frac{e^{-t^2}}{2} dt \qquad \begin{matrix} u = t & u' = 1 \\ v' = te^{-t^2} & v = -\frac{e^{-t^2}}{2} \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} e^{-t^2} dt$$

Lorsque t_0 tend vers $+\infty$, on obtient $G(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

On a :

$$x\sqrt{x}\, F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}\, t^2}{1+t^2} e^{-t^2 x} dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1+\frac{u^2}{x}} e^{-u^2} du \qquad u = t\sqrt{x}$$

$$= -G\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme G est continue en 0, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} G\left(\frac{1}{x}\right) = G(0).$$

d'où $\quad \lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\, F'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

6) Soit $\quad \varepsilon(x) = x\sqrt{x}\, F'(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Alors $\quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$ et $\forall x > 0$:

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} + F'(x)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \varepsilon(x).$$

7) Soit $x > 0$. On a :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{t^2}{1+t^2} e^{-t^2 x} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -\frac{u^2/x}{1+u^2/x} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{x}} \qquad \sqrt{x}\, t = u$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{x+u^2} e^{-u^2} du.$$

On montre que $H : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{x+u^2} e^{-u^2} du$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $h : [0,+\infty[\times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$(u,x) \mapsto \frac{u^2}{x+u^2} e^{-u^2}.$$

La fonction h est continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$ et $\forall\, u, x \geq 0$, on a :

$$|h(u,x)| \leq e^{-u^2}.$$

Le théorème de continuité des intégrales impropres à paramètres implique que H est continue sur $[0,+\infty[$.
On déduit que $\lim_{x \to 0^+} H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En particulier, $\lim_{x \to 0^+} F'(x) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{\sqrt{x}} H(x) = -\infty$

8) On obtient le tableau de variations de F :

x	0		$+\infty$
F'	$-\infty$	$-$	0
F	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

et l'allure du graphe de F