DEVOIR SURVEILLÉ

18 décembre 2023

[durée : 3 heures]

Les documents et les objets électroniques sont interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 *(Intégrales impropres à paramètre)*

Soit $\mathcal{D}_F$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $t \mapsto t^x e^{2t}$ est intégrable sur $]0,1]$. Soit F la fonction définie pour $x \in \mathcal{D}_F$ par

$$F(x) := \int_0^1 t^x e^{2t} dt.$$

a) (i) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^a e^{2t} dt$ en fonction du paramètre réel a. En déduire $\mathcal{D}_F$.

(ii) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t^a |\ln t| e^{2t} dt$ converge quel que soit $a > -1$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et donner sa dérivée F' sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

c) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{e^2}{x+1}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

d) Montrer que $\lim_{x\to-1^-} F(x) = +\infty$.

e) Dresser le tableau de variation de F.

f) Montrer que pour tout $x > -1$, on a

$$F(x) = \frac{e^2}{x+1} - \frac{2}{x+1} F(x+1).$$

g) En déduire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{\alpha}{x}$.

h) En déduire $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) \sim_{x\to-1^+} \frac{\beta}{x+1}$.

i) Tracer l'allure du graphe de F.

T.S.V.P.

Exercice 2 *(Séries de Fourier et séries numériques)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

a) Tracer le graphe de la fonction f.

b) Calculer les coefficients de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de f.

c) Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier S_f de f.

d) Calculer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 3 *(Séries de Fourier et équations différentielles)*

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t)e^{it} = 0. \tag{E}$$

a) (i) Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa somme f est 2π-périodique.

(ii) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f est solution de l'équation différentielle (E).

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une solution 2π-périodique de classe C^2 de l'équation (E).

(i) Pour $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant que g est solution de (E), exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_{n-1}(g)$.

(ii) En utilisant que g est de classe C^2, exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_n(g)$, pour $n \in \mathbb{Z}$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ une relation entre $c_n(g)$ et $c_{n-1}(g)$.

(iii) Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g)$ en fonction de $c_0(g)$.

(iv) En déduire l'ensemble des solutions complexes 2π-périodiques de l'équation différentielle (E).