SOLUTIONS DU DEVOIR SURVEILLÉ

18 décembre 2023

[durée : 3 heures]

Exercice 1 *(Intégrales impropres à paramètre)*

Soit $\mathcal{D}_F$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $t \mapsto t^x e^{2t}$ est intégrable sur $]0,1]$. Soit F la fonction définie pour $x \in \mathcal{D}_F$ par

$$F(x) := \int_0^1 t^x e^{2t} dt.$$

a) (i) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^a e^{2t} dt$ en fonction du paramètre réel a. En déduire $\mathcal{D}_F$.

(ii) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t^a |\ln t| e^{2t} dt$ converge quel que soit $a > -1$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et donner sa dérivée F' sous la forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

c) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{e^2}{x+1}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

d) Montrer que $\lim_{x\to-1^-} F(x) = +\infty$.

e) Dresser le tableau de variation de F.

f) Montrer que pour tout $x > -1$, on a

$$F(x) = \frac{e^2}{x+1} - \frac{2}{x+1} F(x+1).$$

g) En déduire $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{\alpha}{x}$.

h) En déduire $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) \sim_{x\to-1^+} \frac{\beta}{x+1}$.

i) Tracer l'allure du graphe de F.

Solution :

a) (i) Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto t^a e^{2t}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement Riemann-intégrable sur $]0,1]$. Pour tout $t \in]0,1]$, $t^a e^{2t} \geqslant 0$ et $t^a e^{2t} \sim_{t\to0^+} t^a$ donc les intégrales $\int_0^1 t^a e^{2t} dt$ et $\int_0^1 t^a dt$ sont de même nature.

D'autre part $\int_0^1 t^a dt$ converge si et seulement si $a > -1$. Ainsi $\int_0^1 t^a e^{2t} dt$ converge si et seulement si $a > -1$. On en déduit que $\mathcal{D}_F =]-1,+\infty[$.

(ii) Soit $a > -1$. L'application $t \mapsto t^a |\ln t| e^{2t}$ est continue sur $]0,1]$ donc localement Riemann-intégrable sur $]0,1]$. On a également

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1-a}{2}} t^a |\ln t| e^{2t} = \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1+a}{2}} |\ln t| e^{2t} = 0,$$

car $\lim_{t\to 0} e^{2t} = 1$ et, puisque $\frac{a+1}{2} > 0$, on a $\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1+a}{2}} |\ln t| = 0$. Il s'en suit que $t^a |\ln t| e^{2t} = o_{t\to 0^+}\left(t^{\frac{a-1}{2}}\right)$. Comme $t^{\frac{a-1}{2}} \geqslant 0$ pour tout $t \in]0,1]$ et comme $\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}} dt$ converge, on en déduit que $\int_0^1 e^{2t} t^a |\ln t| dt$ converge.

b) Soit $f :]0,1] \times]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t,x) = t^x e^{2t}$. La fonction f est continue sur $]0,1] \times]-1,+\infty[$. Elle est dérivable par rapport à x et pour tout $t \in]0,1]$, tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \ln t \; t^x e^{2t}.$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $]0,1] \times]-1,+\infty[$.

Soit $a > -1$. Pour tout $x \in]a,+\infty[$ et tout $t \in]0,1]$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant |\ln t| t^a e^{2t}$$

car $\ln t \leqslant 0$ donc $x \ln t \leqslant a \ln t$ et comme exp est croissante, $t^x = e^{x\ln t} \leqslant e^{a \ln t} = t^a$.

Nous avons montré dans la question (a.ii) que $\int_0^1 |\ln t| t^a e^{2t} dt$ converge lorsque $a > -1$. Le théorème de dérivation des intégrales impropres à paramètre implique que F est de classe C^1 sur $]a,+\infty[$ pour tout $a > -1$ et $F'(x) = \int_0^1 \ln t \; t^x e^{2t} dt$ quel que soit $x \in]a,+\infty[$.

Comme $a > -1$ est quelconque, on en déduit que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et quel que soit $x \in]-1,+\infty[$, on a

$$F'(x) = \int_0^1 \ln t \; t^x e^{2t} dt.$$

c) Soit $x \in]-1,+\infty[$. Pour tout $t \in]0,1]$, on a

$$0 \leqslant t^x e^{2t} \leqslant t^x e^2,$$

d'où

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 t^x e^2 dt = \lim_{t_0 \to 0^+} \left[\frac{e^2 t^{x+1}}{x+1}\right]_{t=t_0}^{t=1} = \lim_{t_0\to 0^+} \left(\frac{e^2}{x+1} - \frac{e^2 t_0^{x+1}}{x+1}\right) = \frac{e^2}{x+1}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^2}{x+1} = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

d) Pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et tout $t \in]0,1]$, on a $t^x e^{2x} \geqslant t^x$ d'où

$$F(x) \geqslant \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

Comme $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$, on en déduit que $\lim_{x\to-1^+} F(x) = +\infty$.

e) Pour tout $x > -1$, on a
$$F'(x) = \int_0^1 t^x \ln t \; e^{2t} dt \leqslant 0$$
car quel que soit $t \in]0,1]$, quel que soit $x \in]-1,+\infty[$, $\ln t \leqslant 0$ et $t^x e^{2t} \geqslant 0$.

Ainsi on obtient le tableau des variations de F :

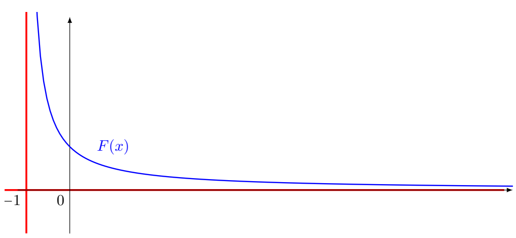
x	-1		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

f) On fait une intégration par partie :
$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{t_0 \to 0^+} \int_{t_0}^1 t^x e^{2t} dt \\ &= \lim_{t_0 \to 0^+} \left(\left[\frac{t^{x+1}}{x+1} e^{2t} \right]_{t=t_0}^{t=1} - \frac{2}{x+1} \int_{t_0}^1 t^{x+1} e^{2t} dt \right) \\ &= \lim_{t_0 \to 0^+} \left(\frac{e^2}{x+1} - \frac{t_0^{x+1}}{x+1} e^{2t_0} - \frac{2}{x+1} \int_{t_0}^1 t^{x+1} e^{2t} dt \right) \\ &= \frac{e^2}{x+1} - \frac{2}{x+1} F(x+1). \end{aligned}$$

g) On a
$$\lim_{x \to +\infty} xF(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} \left(e^2 - 2F(x+1) \right).$$
D'une part on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et d'autre part on a aussi $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$. On en déduit que
$$\lim_{x \to +\infty} xF(x) = e^2$$
d'où $F(x) \sim_{x \to +\infty} \frac{e^2}{x}$.

h) Comme F est continue en 0 :
$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^+} (x+1)F(x) &= \lim_{x \to -1^+} e^2 - 2F(x+1) \\ &= e^2 - 2F(0). \end{aligned}$$
D'autre part $F(0) = \int_0^1 e^{2t} dt = \frac{e^2 - 1}{2}$, d'où on déduit
$$\lim_{x \to -1^+} (x+1)F(x) = e^2 - e^2 + 1 = 1$$
et donc
$$F(x) \sim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1}.$$

i) Le graphe de F :



Exercice 2 *(Séries de Fourier et séries numériques)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

a) Tracer le graphe de la fonction f.

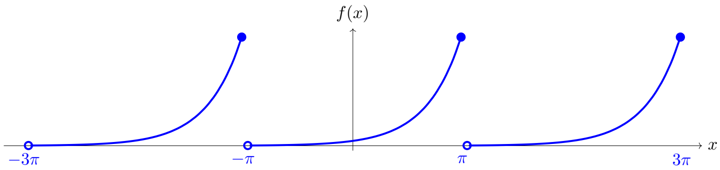
b) Calculer les coefficients de Fourier $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de f.

c) Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier S_f de f.

d) Calculer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Solution :

a) Le graphe de f :



b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, comme $1 - in \neq 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{(1-in)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^n e^{\pi}}{1-in} - \frac{(-1)^n e^{-\pi}}{1-in}\right] = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\,\frac{(1+in)(-1)^n}{(1+n^2)}.$$

On en déduit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{\geqslant 1}$:

$$a_0 = 2c_0 = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}$$
$$a_n = c_n + c_{-n} = 2\mathrm{Re}(c_n) = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}, \quad n \geqslant 1$$
$$b_n = c_{-n} - c_n = -2\mathrm{Im}(c_n) = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\,\frac{n(-1)^{n+1}}{(1+n^2)}, \quad n \geqslant 1$$

c) D'après le théorème de Dirichlet, comme f est C^1 par morceaux et 2π-périodique, la série de Fourier converge simplement vers $\widetilde{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ sur $\mathbb{R}$, et converge uniformément vers f sur tout compact contenu dans son domaine de continuité $\mathbb{R} \setminus \big(\pi + 2\pi\mathbb{Z}\big)$. Par ailleurs, il n'y pas de convergence uniforme, ni normale à fortiori, sur $\mathbb{R}$ car $\widetilde{f}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ alors que les polynômes trigonométriques, dont elle est la limite, le sont.

d) Nous avons, d'après la question précédente,

$$f(0) = S_f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(n0) + b_n\sin(n0)\big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Comme $f(0) = 1$, en utilisant les expressions des $(a_n)_{n\geqslant 0}$, on trouve

$$1 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}.$$

Ainsi on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)} = \frac{\pi}{2\sinh(\pi)} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 *(Séries de Fourier et équations différentielles)*

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t)e^{it} = 0. \tag{E}$$

a) (i) Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa somme f est 2π-périodique.

(ii) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f est solution de l'équation différentielle (E).

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une solution 2π-périodique de classe C^2 de l'équation (E).

(i) Pour $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant que g est solution de (E), exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_{n-1}(g)$.

(ii) En utilisant que g est de classe C^2, exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_n(g)$, pour $n \in \mathbb{Z}$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ une relation entre $c_n(g)$ et $c_{n-1}(g)$.

(iii) Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g)$ en fonction de $c_0(g)$.

(iv) En déduire l'ensemble des solutions complexes 2π-périodiques de l'équation différentielle (E).

Solution :

Il s'agit de l'exercice 13 de fiche d'exercices n°4, fait en TD.

a) (i) Nous avons la majoration indépendante de t, $\left|\frac{(-1)^n}{(n!)^2}e^{int}\right| = \frac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$, et comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} < \infty$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}e^{int}$ converge normalement, donc simplement, sur $\mathbb{R}$. De plus comme toutes les fonctions $f_n(t) := \frac{(-1)^n}{(n!)^2}e^{int}$ sont 2π-périodiques, leur somme l'est également, car la périodicité est préservée par passage à la limite (simple).

(ii) Les fonctions f_n sont C^∞ et nous avons pour $n \geqslant 1$, $f_n'(t) = \frac{i(-1)^n}{n!(n-1)!}e^{int}$ et $f_n''(t) = \frac{(-1)^{(n-1)}}{((n-1)!)^2}e^{int}$. De plus nous avons pour $n \geqslant 0$, $\left|f_{n+1}''(t)\right| = \frac{1}{(n!)^2} \leqslant \frac{1}{n!}$ et $\left|f_{n+1}'(t)\right| = \frac{1}{n!(n+1)!} \leqslant \frac{1}{n!}$, avec $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e < \infty$. Donc les séries $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ et $\sum_{n\geqslant 0} f_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la somme $f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est C^2 avec $f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(t)$, $f''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n''(t)$, car :

- ▷ les fonctions f_n'' sont toutes continues,
- ▷ la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n''$ converge normalement,
- ▷ les séries $\sum_{n\geqslant 0} f_n'$ et $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

Comme $f_0'(t) = 0$, en ré-indexant la somme, on trouve

$$f(t)e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{i(n+1)t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{((n-1)!)^2} e^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(t) = f''(t).$$

Donc f vérifie $f''(t) - f(t)e^{it} = 0$.

b) (i) Comme g est solution de (E), nous avons

$$c_n(g'') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g''(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{it}e^{-int}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-i(n-1)t}\,\mathrm{d}t = c_{n-1}(g).$$

(ii) Pour toute fonction de classe C^k nous avons $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$. La formule $c_n(f') = (in)c_n(f)$ se démontre par intégration par parties, et la formule générale s'en déduit par récurrence.

Ainsi nous avons $c_n(g'') = -n^2 c_n(g)$. Puis, en utilisant la question précédente, on trouve $c_{n-1}(g) = -n^2 c_n(g)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Abrégeons $c_n \coloneqq c_n(g)$. La formule $c_{n-1} = -n^2 c_n$ nous donne pour $n = 0$, $c_{-1} = -0^2 c_0 = 0$.

Démontrons par récurrence que $c_{-n} = 0$ pour $n \geqslant 1$: supposons $c_{-k} = 0$, alors $c_{-(k+1)} = -(-k)^2 c_{-k} = 0$.

Démontrons par récurrence que $c_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}c_0$ pour $n \geqslant 0$. Pour $n = 0$ cette formule est vérifiée en utilisant que $0! = 1$. Supposons $c_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2}c_0$ alors $c_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2}c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}c_0$.

Ainsi on vient de démontrer, par deux récurrences,

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{, si } n < 0, \\ \frac{(-1)^n}{(n!)^2}c_0 & \text{, si } n \geqslant 0. \end{cases}$$

(iv) Comme g est une fonction C^1, alors g coïncide avec sa série de Fourier, $g(t) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}c_0 e^{int} = c_0 f(t)$. Ainsi les seules solutions possibles sont de la forme $c_0 f$ pour $c_0 \in \mathbb{C}$. Et comme, d'après (a), la fonction f est une solution de l'équation linéaire (E), alors toutes ses multiples $c_0 f$ le sont aussi.

Ainsi, pour conclure, l'ensemble des solutions 2π-périodiques de (E) est le sous-espace vectoriel [1] engendré par f.

1. Il s'agit d'une droite vectorielle, car $f \neq 0$, vu que ses coefficients de Fourier ne sont pas tous nuls, ou car $f(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} > 0$.