TD1 - Rappels

Uniforme continuité

Exercice 1

a) Montrer que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction k-lipschitzienne sur un intervalle I (c'est-à-dire $\forall x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$), alors f est uniformément continue sur I.

b) En déduire que $x \longmapsto \sin(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $x \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas lipschtzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2

Montrer que $x \longmapsto x^2$ est uniformément continue sur tout compact de $\mathbb{R}$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant ax + b$ (autrement dit, une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ est majorée par une fonction affine).

a) Justifier l'existence de $\eta_1 > 0$ tel que

$$|x - y| < \eta_1 \implies |f(x) - f(y)| \leqslant 1.$$

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $n_0 = \left[\frac{x_0}{\eta_1}\right] + 1$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière).

(i) Montrer que

$$|f(x_0) - f(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right)\right|.$$

(ii) En déduire le résultat.

c) Application :

(i) Montrer que $f : x \longmapsto e^x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que P est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

Exercice 4

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle (quelconque) I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On définit alors pour $x \in I$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Montrer que F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, on a $F'(x) = f(x)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

a) Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $e^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\ln(2)$. Etablir une inégalité analogue sur $\mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire que f peut se prolonger par continuité en 0.

d) Etudier les limites de f à l'infini.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
Indication : Soit $\varepsilon > 0$, on pourra découper l'intégrale sur $[0, \pi/2 - \varepsilon]$ et $[\pi/2 - \varepsilon, \pi/2]$.

Exercice 7

Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant connu sous le nom de *deuxième formule de la moyenne :* soient f, g deux fonctions définies et continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que g est positive et décroissante. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx. \tag{1}$$

Pour cela, considérons $\mathcal{S} = (x_0, x_1, \dots x_n)$ une subdivision de $[a, b]$, c'est-à-dire $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, et notons $\delta(\mathcal{S}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$ le pas de la subdivision. On notera aussi $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$.

a) Montrer que $\left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x) - g(x_{i-1}))f(x)\,dx\right| \leqslant \|f\|_\infty \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})g(x_{i-1}) - \int_a^b g(x)\,dx\right)$.

b) En déduire que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lim_{\delta(\mathcal{S})\to 0} \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx.$$

c) Justifier que F admet un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$.

d) En utilisant une transformation d'Abel, montrer que

$$mg(a) \leqslant \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leqslant Mg(a).$$

e) En déduire le résultat.

Application : Soit f une application continue décroissante de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers zéro à l'infini. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_n^{n^2} f(t)e^{it}\,dt.$$

Intégrales généralisées

Exercice 8

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\textbf{a)}\ \int_0^1 \ln t\,dt,\quad \textbf{b)}\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt,\quad \textbf{c)}\ \int_0^{+\infty} x(\sin x)e^{-x}dx,\quad \textbf{d)}\ \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}dt,\quad \textbf{e)}\ \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}.$$

Exercice 9

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\textbf{a)}\ \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1},\quad \textbf{b)}\ \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2}dt,\quad \textbf{c)}\ \int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$

Exercice 10

Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$\textbf{a)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt,\quad \textbf{b)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}dx,\quad \textbf{c)}\ \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}dt.$$

Exercice 11

Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales impropres suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt,\quad \textbf{b)}\ \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}dt,\quad \textbf{c)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}dt.$$

Exercice 12

a) Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}dx$.

b) Démontrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}dx$.

c) Etudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})-\ln(x)}{x^{3/4}}dx$.

Exercice 13

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int_4^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx,\quad \textbf{b)}\ \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)dx,\ \alpha>0.$$

Exercice 14

Justifier la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt,\quad \textbf{b)}\ \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}dt,\quad \textbf{c)}\ \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-at}dt,\ a>0.$$

Exercice 15

a) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, et soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites tendant vers $+\infty$. Démontrer que $\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$ tend vers 0.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t\sin t}dt$ diverge.

Exercice 16

Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

Exercice 17

a) Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a, +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) il existe un réel M tel que pour tout $x \geqslant a$, on a

$$\left| \int_a^x f(t)\, dt \right| \leqslant M;$$

(ii) la fonction g est décroissante et $\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$.

Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\, dt$ est convergente.

Indication : on pourra utiliser la deuxième formule de la moyenne.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

c) Donner une autre preuve de la convergence de l'intégrale précédente en utilisant une intégration par partie.