
TD2 - Intégrales définies dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(tx)\, dt$.

a) Montrer que F est bien définie, continue et paire sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 2

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^3 e^{xt}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$.

a) Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Par une décomposition en éléments simples, calculer $F(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$. Montrer que F est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{x^2+t^2}$.

a) Montrer que F est bien définie, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et pour $x > 0$, exprimer $F'(x)$ sous la forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

b) Calculer $F(x)$ directement par un calcul de primitive.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

Exercice 6

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose

$$F(x) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $]-1, 1[$ et que pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$F(x) = 2\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\, dt.$$

b) Montrer que F est dérivable sur $]-1, 1[$.

c) En posant $u = \tan(t/2)$, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $F'(x) = 0$.

d) En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Exercice 7

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $F(0)$ et $F'(0)$.

d) Montrer que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et convexe.

e) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

f) Donner l'allure du graphe de F.

Exercice 8

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2(t))\, dt$, $x > -1$.

a) Montrer que F est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Calculer $F'(0)$.

b) A l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$, montrer que pour tout $x > -1$, on a
$$F'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}.$$

c) En déduire finalement la valeur de $F(x)$.

Exercice 9

Pour $x > 0$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$.

a) Justifier que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et étudier les variations de f.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) En utilisant $1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos(t) \leqslant 1$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, démontrer que $f(x) \sim_{x\to0^+} -\ln x$.

d) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
Indication : on pourra calculer $xf(x) - 1$.

Exercice 10

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2}\, dt,\ x > 0$.

a) Montrer que F est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left(F(x) - f(0) \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\, dt \right) = 0$.
Indication : On pourra écrire que $F(x) - f(0) \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{x}{x^2+t^2}(f(t) - f(0))\, dt$ et découper l'intégrale en deux, sur $[0,\delta] \cup [\delta, 1]$. Pour la première intégrale, on pourra alors utiliser la continuité de f en 0.

d) En déduire que $\lim_{x\to0^+} F(x) = \dfrac{\pi}{2} f(0)$.

e) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètres pour répondre à la question précédente ?

Exercice 11

a) Soit φ une fonction définie sur un voisinage de 0, à valeurs strictement positive et dérivable en 0. Supposons en plus que $\varphi(0) = 1$. Déterminer $\lim_{x\to 0}(\varphi(x))^{1/x}$.

b) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et supposons que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) > 0$. Posons

$$I(x) = \int_0^1 f(t)^x \, dt.$$

Montrer que I est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_0^1 f(t)^x \, dt\right)^{1/x} = \exp\left(\int_0^1 \log(f(t)) \, dt\right).$$

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.

a) On suppose que $f(0) = 0$ et on pose $g(x) = f(x)/x$, $x \neq 0$. Justifier que pour $x \neq 0$, on a

$$g(x) = \int_0^1 f'(tx) \, dt.$$

En déduire que g se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose maintenant que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. On pose maintenant $g(x) = f(x)/x^n$, $x \neq 0$. Justifier que g se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons

$$F(x) = \int_0^x \sin(x-t) \, f(t) \, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) En utilisant le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, montrer que F est de classe C^2 et satisfait $F''(x) + F(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Comment peut-on retrouver ce résultat ?

Exercice 14

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} \, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt.$$

a) Montrer que F et G sont bien définies et dérivables sur $]0, \infty[$ et vérifier que $F'(x) = G'(x)$, $x > 0$.

b) En déduire que pour tout $x > 0$, on a

$$\int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t} \, dt = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} \, dt.$$

Exercice 15

Pour $x \in I = [0, +\infty[$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

a) Montrer que F est définie, continue et dérivable sur I. Exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

b) Justifier que G est définie, continue et dérivable sur I et montrer que

$$F'(x) + G'(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

c) En déduire que, $\forall x \in I$, $F(x) + G(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

d) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Indication : On pourra remarquer que $|F(x)| \leqslant e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

e) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 16

Soit $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1 - x\cos(t)}\,dt$.

a) Montrer que F est continue et dérivable sur $[0, 1[$. Exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale (qu'on ne cherchera pas à calculer).

b) Montrer que

$$xF'(x) = -F(x) + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(t)}{1 - x\cos(t)}\,dt.$$

Indication : On effectuera une intégration par partie dans l'intégrale donnant $xF'(x)$.

c) Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(t)}{1 - x\cos(t)}\,dt = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},$$

et en déduire que F est solution sur $]0, 1[$ de l'équation différentielle suivante :

$$xy' + y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}. \tag{E}$$

d) Calculer une primitive sur $]0, 1[$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Indication : On pourra effectuer le changement de variable $x = \sin(t)$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

e) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et montrer qu'il existe une et seule solution qui se prolonge par continuité sur $[0, 1]$.

f) Montrer que l'intégrale (généralisée) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1 - \cos(t)}\,dt$ converge. On notera I sa valeur.

g) Montrer que $\lim_{x\to 1^-} F(x) = \dfrac{I}{\pi}$. *Indication : On pourra découper l'intégrale en deux, sur* $[0, \varepsilon]$ *puis* $[\varepsilon, \pi]$.

h) En déduire la valeur de I.