TD3 - Intégrales impropres dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculer $F'(x)$.

d) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$.

a) Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour tout $x > 0$.

d) En déduire un équivalent de f en 0.

e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

d) En déduire le calcul de $f(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 4

Soit l'application $f : x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

d) En déduire le calcul de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Indication : On pourra calculerculer $f(0)$ en faisant le changement de variable $u = 1/t$.*

Exercice 5

Étudier la continuité au point 0 de F définie par $F(0) = 0$ et

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + xt^2)}{t^2} dt \text{ si } x > 0.$$

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n} dt$.

a) Montrer que I_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $I_n'(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$, pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$.

b) Calculer $I_1(x)$, $x > 0$.

c) En déduire la valeur de $I_2(x)$, puis $I_3(x)$, $x > 0$.

Exercice 7

a) Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente. Nous allons calculer la valeur de I.

Pour tout $x \geqslant 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.

c) Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$ pour $x > 0$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, soit

$$F_n(x) = \int_0^n \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt.$$

(i) Montrer que $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur $[0, +\infty[$. *Indication : On pourra utiliser la seconde formule de la moyenne.*

(ii) Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction F_n est continue sur $[0, +\infty[$.

(iii) En déduire que $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0)$.

e) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 8

Soit Γ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Cette fonction s'appelle la fonction Gamma d'Euler.

a) Montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^n t^{x-1} dt.$$

b) Montrer que $\Gamma(1) = 1$, que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

c) En déduire que $\Gamma(n) = (n - 1)!$, $n \geqslant 1$.

d) Montrer que $\ln(\Gamma)$ est bien définie et convexe.

Exercice 9

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-t^2} dt$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une fonction F continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' sous a forme d'une intégrale.

c) Trouver une relation simple entre $F'(x)$ et $F(x)$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}} F(x)$. Montrer que la fonction G est constante sur $\mathbb{R}$. En admettant l'égalité $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire une expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x \geqslant 0$.

c) En déduire une expression de $F(x)$ pour $x \geqslant 0$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

d) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt.$$

Exercice 11

On pose, pour tout $x > 0$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t}\, dt.$$

a) Montrer que F est bien définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer F' puis en déduire une expression de F.

c) En déduire pour tous $a, b > 0$ la valeur de l'intégrale

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx.$$

Exercice 12

Calculer $\hat{f}$, la transformée de Fourier de f, dans les cas suivants, après avoir vérifié son existence :

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$.

Exercice 13

Soit $f(t) = e^{-t^2}$.

a) Justifier que $\hat{f}$ existe et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\hat{f}$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on résoudra.

c) En déduire une expression de $\hat{f}$.

Exercice 14

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La **transformée de Laplace** de f est la fonction $\mathcal{L}f$ définie par

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt.$$

Supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^n} = 0.$$

a) Montrer que $\mathcal{L}f$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que $\lim_{s\to+\infty}(\mathcal{L}f)(s) = 0$.

c) Montrer que $\mathcal{L}f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $s > 0$, on a

$$(\mathcal{L}f)'(s) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}\,dt.$$

d) Calculer $\mathcal{L}f$ dans les cas suivants :

$$\textbf{1.}\ f(t) = 1,\ t \geqslant 0, \qquad \textbf{2.}\ f(t) = t,\ t \geqslant 0.$$

Exercice 15

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

a) En utilisant le critère de Cauchy et la seconde formule de la moyenne, montrer que $\mathcal{L}f$ est bien définie sur $[0,+\infty[$.

b) Pour $X \geqslant 0$, on définit

$$I_X(a) = \int_0^X f(t)e^{-at}\,dt, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Justifier que I_X est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que I_X converge uniformément vers $\mathcal{L}f$ sur $[0,+\infty[$ lorsque $X \to +\infty$.

d) En déduire que $\mathcal{L}f$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt$ converge. Le produit de convolution de f par g est la fonction notée $f * g$ et définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que $f * g$ est bien définie, continue et borné sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que $f * g = g * f$.

c) On suppose de plus que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f' est bornée. Montrer alors que $f*g$ est dérivable et que $(f * g)' = f' * g$.