TD4 - Séries de Fourier

Exercice 1

Soit f la fonction paire, 2π-périodique et définie par $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$.

a) Déterminer la série de Fourier de f.

b) Etudier la convergence de cette série de Fourier.

c) En déduire les valeurs des séries suivantes :

$$\textbf{1.} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \textbf{2.} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad \textbf{3.} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \textbf{4.} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 2

On considère la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

a) Déterminer la série de Fourier de f.

b) Etudier la convergence de cette série de Fourier.

c) Ecrire l'identité de Parseval pour cette série de Fourier.

Exercice 3

Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions 2π-périodiques définies par :

a) $g(x) = \frac{x}{2}$ si $x \in]-\pi, \pi[$ et $g(\pi) = 0$.

b) $h(x) = |\sin(x)|$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

c) $k(x) = |x|(\pi - |x|)$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

Exercice 4

On considère la fonction f de période 2π, définie par $f(x) = \mathrm{ch}(x)$, $x \in [-\pi, \pi[$.

a) Déterminer pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f)$, puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

c) En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 5

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi[$.

a) Calculer les. coefficients de Fourier de f.

b) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.

c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6

Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1 - x^2)$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(b_n)_{n \geqslant 1}$ telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

b) Calculer les coefficients $(b_n)_{n \geqslant 1}$.

c) En déduire les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 7

Soit g la fonction 2π-périodique, paire, égale à $g(x) = \pi$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $g(x) = 0$ si $1 < x \leqslant \pi$.

a) Déterminer la série de Fourier de g et discuter sa convergence.

b) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n)}{n} \right)^2.$$

Exercice 8 *(Le développement eulérien du sinus)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On désigne par f_α la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \qquad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t).$$

a) Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

b) Fixons $x \in]0, \pi[$ et soit $f : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{cotan}(t) - \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leqslant x \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Vérifier que f est continue sur $[0, x]$ et montrer que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

c) En déduire que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \qquad \sin(t) = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right),$$

où l'égalité ci-dessus signifie que la suite $t \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge vers $\sin(t)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{e^{it}}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{k!}.$$

c) En déduire les coefficients de Fourier c_n de f, pour $n \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)}\,dt = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

Exercice 10 *(Inégalité de Wirtinger)*

a) Soient $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(t) = Ae^{it} + Be^{-it}$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2\,dt = \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2\,dt.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1, 2π-périodique et telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt.$$

c) Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

Exercice 11

a) Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

b) Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi[$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$?

c) Existe-t-il une suite réelle $(c_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx)$?

Exercice 12

a) La série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux 2π-périodique ?

b) La série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ est-elle la série de Fourier d'une fonction C^1 par morceaux 2π-périodique ?

Exercice 13 *(Equations différentielles et séries de Fourier)*

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - y(t)e^{it} = 0. \tag{E}$$

a) (i) Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} e^{int}$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa somme f est 2π-périodique.

(ii) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f est solution de l'équation différentielle (E).

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une solution 2π-périodique de classe C^2 de l'équation (E).

(i) Pour $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant que g est solution de (E), exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_{n-1}(g)$.

(ii) En utilisant que g est de classe C^2, exprimer $c_n(g'')$ en fonction de $c_n(g)$, pour $n \in \mathbb{Z}$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ une relation entre $c_n(g)$ et $c_{n-1}(g)$.

(iii) Calculer, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g)$ en fonction de $c_0(g)$.

(iv) En déduire l'espace vectoriel des solutions complexes 2π-périodiques de l'équation différentielle (E).

Exercice 14 *(Equations différentielles et séries de Fourier)*

On considère l'équation différentielle

$$(E_{a,b}) \qquad y''(t) + (a + be^{2it})y(t) = 0,$$

avec a, b deux nombres complexes.

a) On suppose dans cette question que a est réel et $b = 0$. Résoudre $(E_{a,0})$. L'équation $(E_{a,0})$ admet-elle des solutions non nulles 2π-périodiques ?

b) Soit f une fonction indéfiniment dérivable et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k strictement positif, on a lorsque n tend vers $+\infty$:

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

c) (i) Montrer que toute solution de $(E_{a,b})$, 2π-périodique, est indéfiniment dérivable, développable en série de Fourier ainsi que ses dérivées.

(ii) Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $g(t) = (a + be^{2it})f(t)$. Pour tout entier n, calculer $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.

d) Montrer que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{a,b})$ vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f).$$

e) Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_n = \frac{b\gamma_{n-1}}{4n^2}, \end{cases}$$

et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2int}$. Montrer que la fonction φ est une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{0,b})$.

Exercice 15

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues, 2π-périodiques. On note $f * g$ la fonction définie par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x - t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que $f * g$ est une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\widehat{f * g}(n) := c_n(f * g)$ en fonction de $\hat{f}(n)$ et $\hat{g}(n)$.

c) Démontrer que la série de Fourier de $f * g$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et calculer sa somme.

Exercice 16

Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Notons $S_n(f)$ la n-ème somme partielle de la série de Fourier de f, c'est-à-dire $S_n(f)(t) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k(f)e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|S_n(f)\|_\infty \leqslant 1$. Montrer alors que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

Exercice 17

Soit f une fonction 2π-périodique et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) = o(n^{-k})$, $|n| \to +\infty$.

Exercice 18

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha.$$

a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, exprimer

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt$$

en fonction du coefficient de Fourier $c_n(f)$ de f.

c) Soit $g_a(t) = f(t+a) - f(t-a)$, $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer le coefficient de Fourier $c_n(g_a)$ en fonction de $c_n(f)$.

d) En déduire que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sin(na)|^2 |c_n(f)|^2 \leqslant C^2 4^{\alpha-1} a^{2\alpha}.$$

e) On suppose maintenant que $\alpha > 1/2$.

(i) Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{2^{p-1}\leqslant|n|<2^p} \left|\sin\left(n\frac{\pi}{2^{p+1}}\right)\right|^2 |c_n(f)|^2 \leqslant C^2 \frac{\pi^{2\alpha}}{4^{\alpha p+1}}.$$

(ii) En déduire que

$$\sum_{2^{p-1}\leqslant|n|<2^p} |c_n(f)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{\pi^\alpha}{2^{p(\alpha-1/2)}}.$$

(iii) Conclure que la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19

a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ. Montrer alors que si

$$c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k, \qquad n \geqslant 1,$$

alors la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ tend aussi vers ℓ.

b) Montrer que si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite monotone, alors la réciproque est aussi vraie.

c) En déduire que si f est une fonction continue et 2π périodique sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) \geqslant 0$, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra considérer les sommes de Féjer en 0.